open green road

Guía Matemática

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

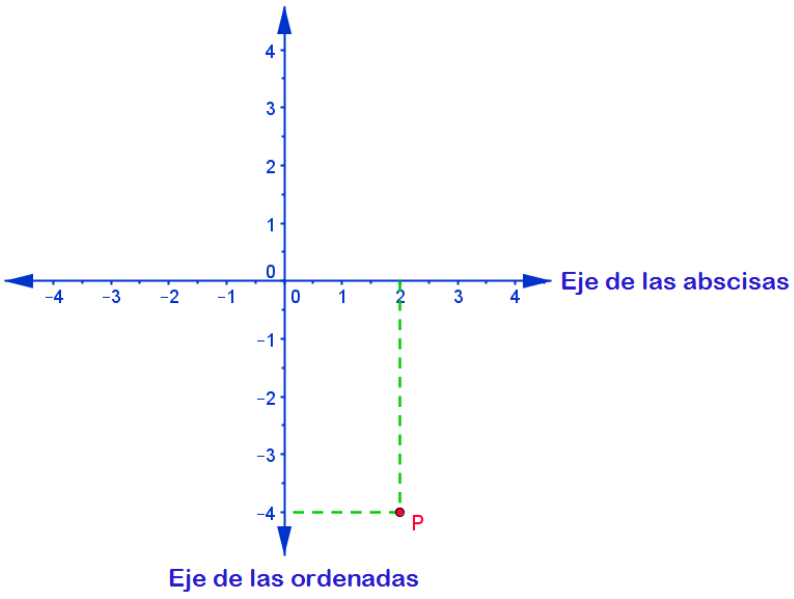
1. Transformaciones isométricas



Las transformaciones geométricas están presentes en diversos campos de la actividad humana así como también dentro de la naturaleza. Los artistas suelen utilizar con frecuencia movimientos de diversas figuras en el plano para realizar sus creaciones artísticas como los mosaicos. De igual forma, dentro de la naturaleza podemos notar como las alas extendidas de las mariposas guardan ciertas relación con la repetición de los mismos colores y diseños. Estos ejemplos nombrados anteriormente tienen directa relación con algunas transformaciones isométricas que estudiaremos más adelante.

La palabra isometría significa "igual medida", por lo tanto la **transformación isométrica** de una figura en el plano corresponde aquellos movimientos que no alterar ni la forma ni el tamaño de la figura, sino que sólo alteran su posición u orientación. De acuerdo a lo anterior, luego de realizar cualquier transformación isométrica, obtendremos como resultado una figura final geométricamente congruente a la figura inicial.

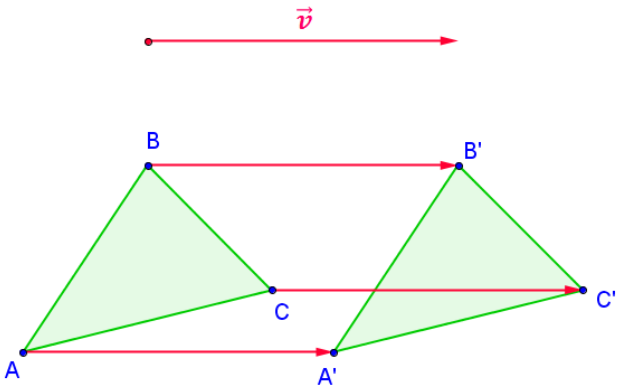
Entre las transformaciones isométricas que estudiaremos se encuentran las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones o simetrías. Cuando trabajemos con cualquiera de estas tres transformaciones nos será útil acudir a un **sistema de coordenadas** para poder describir la posición de diferentes puntos que forman nuestras figuras a transformar. Recordemos que un sistema de coordenadas está formado por dos rectas numeradas perpendiculares, una horizontal, denominada eje de la abscisa o eje x y otra vertical, denominada eje de las ordenadas o eje y. Estas dos rectas se intersectan en un punto denominado origen que corresponde al 0 de la recta numérica.



La posiciones de los puntos en el plano cartesiano se designan como pares ordenados, por ejemplo el punto P de la figura se escribe como $P(2, -4)$. En esta notación el número 2 nos indica que el punto P se ubica dos unidades hacia la derecha en el eje de la abscisas y el número -4 nos indica que el punto P se ubica cuatro unidades hacia abajo en el eje de las ordenadas.

1.1. Traslación

Una **traslación** corresponde a un movimiento de una figura en una dirección fija, por lo tanto lo que se realiza es un desplazamiento que produce un **cambio en la posición** de la figura conservando los ángulos y las distancias entre sus puntos.



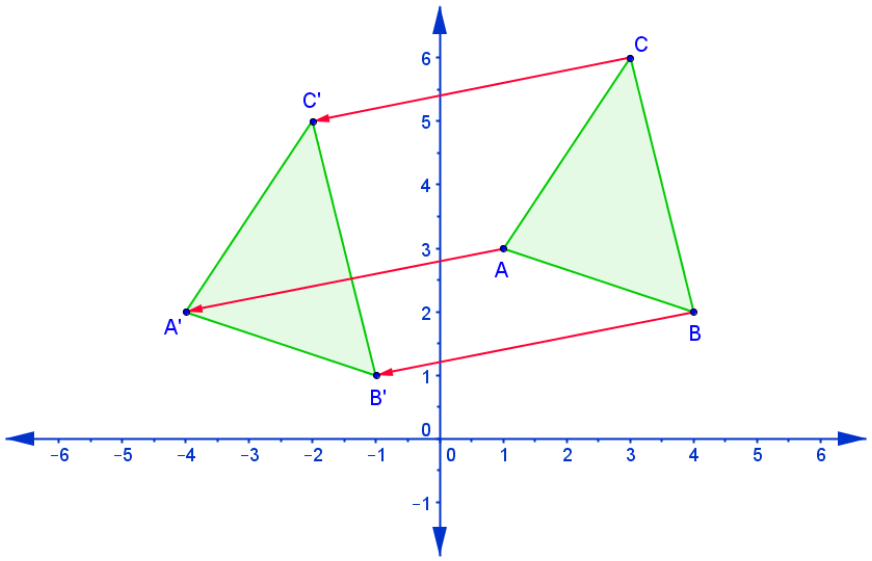
Este cambio de lugar que se le realiza a la figura está determinado por tres factores:

- Por una **magnitud** que indica la distancia que hay que desplazar la figura, por lo que, corresponde a la distancia entre el punto inicial y el punto final trasladado.
- Por un **sentido** que indica hacia donde se está desplazando la figura, por ejemplo, en la imagen superior el $\triangle ABC$ se desplaza hacia la derecha.
- Por una **dirección** que indica la pendiente con que se realiza el movimiento, por ejemplo, en la imagen superior el $\triangle ABC$ se desplaza de manera horizontal con una pendiente igual a 0.

Estos tres factores antes vistos corresponden justamente a las características fundamentales de un vector, por lo tanto, toda traslación queda definida por un **vector de traslación**. Usualmente los vectores se designan con letras minúsculas y con una flecha arriba, por ejemplo: $\vec{v}$.

En general a las traslaciones las designamos como $\vec{T}$ o como $\vec{T} = (a, b)$, en donde el par ordenado (a, b) denota las componentes del vector trasladado, de esta forma si tengo que realizar la traslación $\vec{T} = (a, b)$ significa que tengo que mover todos los puntos del plano a unidades en la dirección del eje x y b unidades en la dirección del eje y. El sentido del movimiento lo indicara el signo que poseen los elementos de mis pares ordenados, en caso de que $a < 0$ movemos los puntos hacia la izquierda o en caso contrario, hacia la derecha, por otro lado si $b < 0$ movemos los puntos hacia abajo o en caso contrario, hacia arriba.

Para realizar la traslación de una figura en el plano debemos proceder de la siguiente forma. Por ejemplo, si queremos trasladar el $\triangle ABC$ cuyos vértices son los puntos $A(1, 3)$, $B(4, 2)$ y $C(3, 6)$, de acuerdo al vector $\vec{v} = (-5, -1)$ significa que debemos mover todos los puntos del plano 5 unidades hacia la izquierda y 1 unidades hacia abajo, tal como lo muestra la siguiente figura:



De acuerdo a la imagen podemos notar que para trasladar por ejemplo los vértices del $\triangle ABC$ basta con sumarles a sus pares ordenados el vector traslación, es decir:

$$A(1,3) + T(-5,-1) = A'(-4,2)$$
$$B(4,2) + T(-5,-1) = B'(-1,1)$$
$$C(3,6) + T(-5,-1) = C'(-2,5)$$

Finalmente al realizar la traslación del $\triangle ABC$ respecto al vector $\vec{v} = (-5,-4)$ obtenemos el $\triangle A'B'C'$ con coordenadas $A'(-4,2)$, $B'(-1,1)$ y $C'(-2,5)$.

A aplicar una traslación $\vec{T} = (a,b)$ a un punto cualquiera $P(x,y)$ la imagen que se obtiene corresponde al punto $P'(x+a, y+b)$.

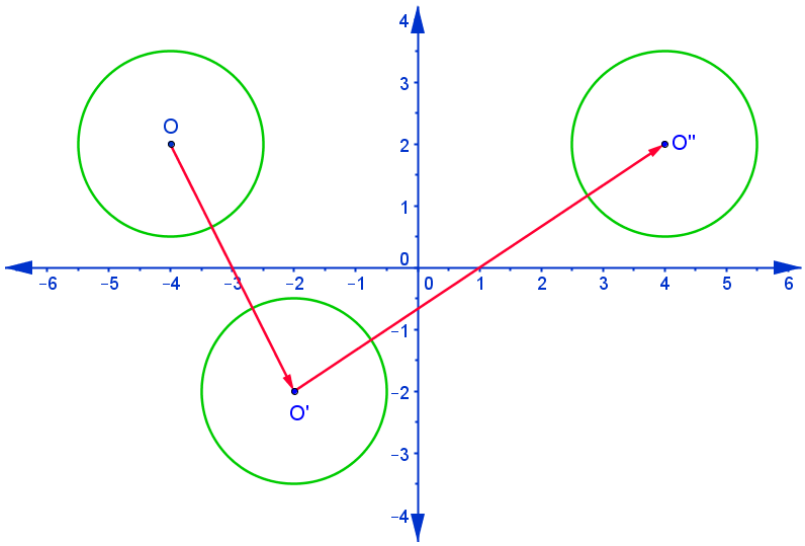
1.1.1. Composición de traslaciones

Cuando hablemos de composición de traslaciones estamos haciendo referencia a la aplicación de dos traslaciones a una figura de forma consecutiva, es decir, una después de la otra.

Por ejemplo si a un círculo de centro $O(-4,2)$ le aplicamos la traslación $\vec{T} = (2,-4)$ y luego otra traslación $\vec{T'} = (6,4)$ obtenemos un círculo cuyo centro es el punto $O''(4,2)$.

$$O(-4,2) + \vec{T}(2,-4) = O'(-2,-2)$$

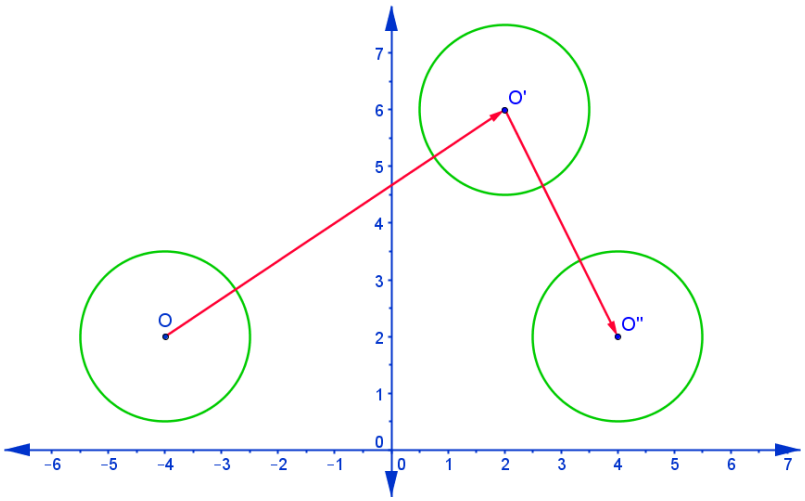
$$O'(-2,-2) + \vec{T'}(6,4) = O''(4,2)$$



Por otro lado, si al mismo círculo de centro $O(-4,2)$ le aplicamos las traslaciones en sentido inverso, es decir primero le aplicamos $\vec{T'} = (6,4)$ y luego $\vec{T} = (2,-4)$ obtenemos un círculo cuyo centro es el mismo punto $O''(4,2)$.

$$O(-4,2) + \vec{T'}(6,4) = O'(2,6)$$

$$O'(2,6) + \vec{T}(2,-4) = O''(4,2)$$



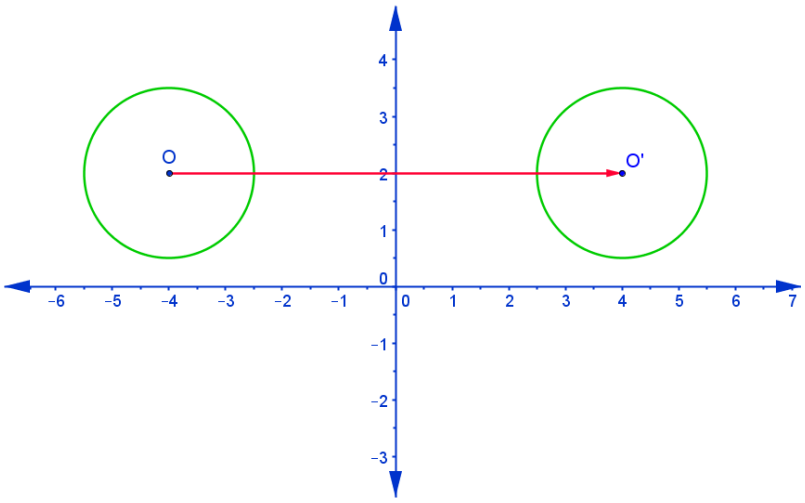
De acuerdo a lo anterior podemos ver que el orden en que se aplican las traslaciones no influye en el resultado final ya que en ambos casos partimos con un círculo de centro $O(-4,2)$ y terminamos con un círculo de centro $O''(4,2)$.

En la composición de traslaciones el orden en que se aplican a la figura no influye en el resultado.

$$\vec{T}_{(a,b)} \circ \vec{T'}_{(c,d)} = \vec{T'}_{(c,d)} \circ \vec{T}_{(a,b)}$$

Ahora bien, si al círculo de centro $O(-4,2)$ le aplicamos una única traslación $\vec{T''} = (8,0)$ obtenemos un círculo cuyo centro es el mismo punto $O'(4,2)$.

$$O(-4,2) + T(8,0) = O'(4,2)$$



Podemos notar que el vector traslación $\vec{v} = (8,0)$ que se le aplicó al círculo corresponde a la suma de los dos vectores traslaciones antes vitos, es decir, $(8,0) = (2+6, -4+4) = (2,-4) + (6,4)$. En base a esto podemos decir que aplicar dos traslaciones es equivalente a aplicar una única traslación determinada por la suma de los vectores de traslación.

Toda composición de traslaciones se puede reducir a una única traslación cuyo vector de traslación corresponde a la suma de cada vector por separado.

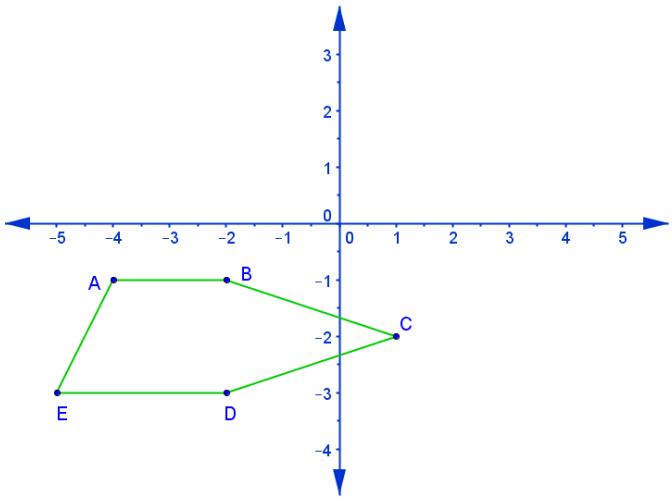
$$\vec{T}_{(a,b)} \circ \vec{T'}_{(c,d)} = \vec{T''}_{(a+c,b+d)}$$

✍ *Ejercicios* 1

1. A un triángulo de vértices $A(0,5)$, $B(3,7)$ y $C(-1,-1)$ se le aplica una traslación según el vector $\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, 0, \overline{3}\right)$. ¿Cuáles son los nuevos vértices del triángulo?

2. Al punto $A(6,9)$ se le aplica una traslación obteniéndose el punto $A'(-1,12)$. ¿Cuál es la imagen del punto $B(-2,-5)$ si se le aplica la misma traslación?

3. *En base al polígono $ABCDE$ de la figura resolver los siguientes ejercicios:*



a) ¿Qué traslación se realizó al polígono $ABCDE$ para obtener el polígono $A'B'C'D'E'$ cuyos vértices son: $A'(-1,3)$, $B'(1,3)$, $C'(4,2)$, $D'(1,1)$ y $E'(-2,1)$.

b) Dibujar en el plano cartesiano la imagen del polígono $ABCDE$ al aplicar $\vec{T}_{(3,-4)} \circ \vec{T}'_{(-7,-1)}$.

c) Dibujar en el plano cartesiano la imagen del polígono $ABCDE$ luego de aplicarle $\vec{T}_{(5,5)} \circ \vec{T}'_{(2,-6)} \circ \vec{T}''_{(-10,7)}$.

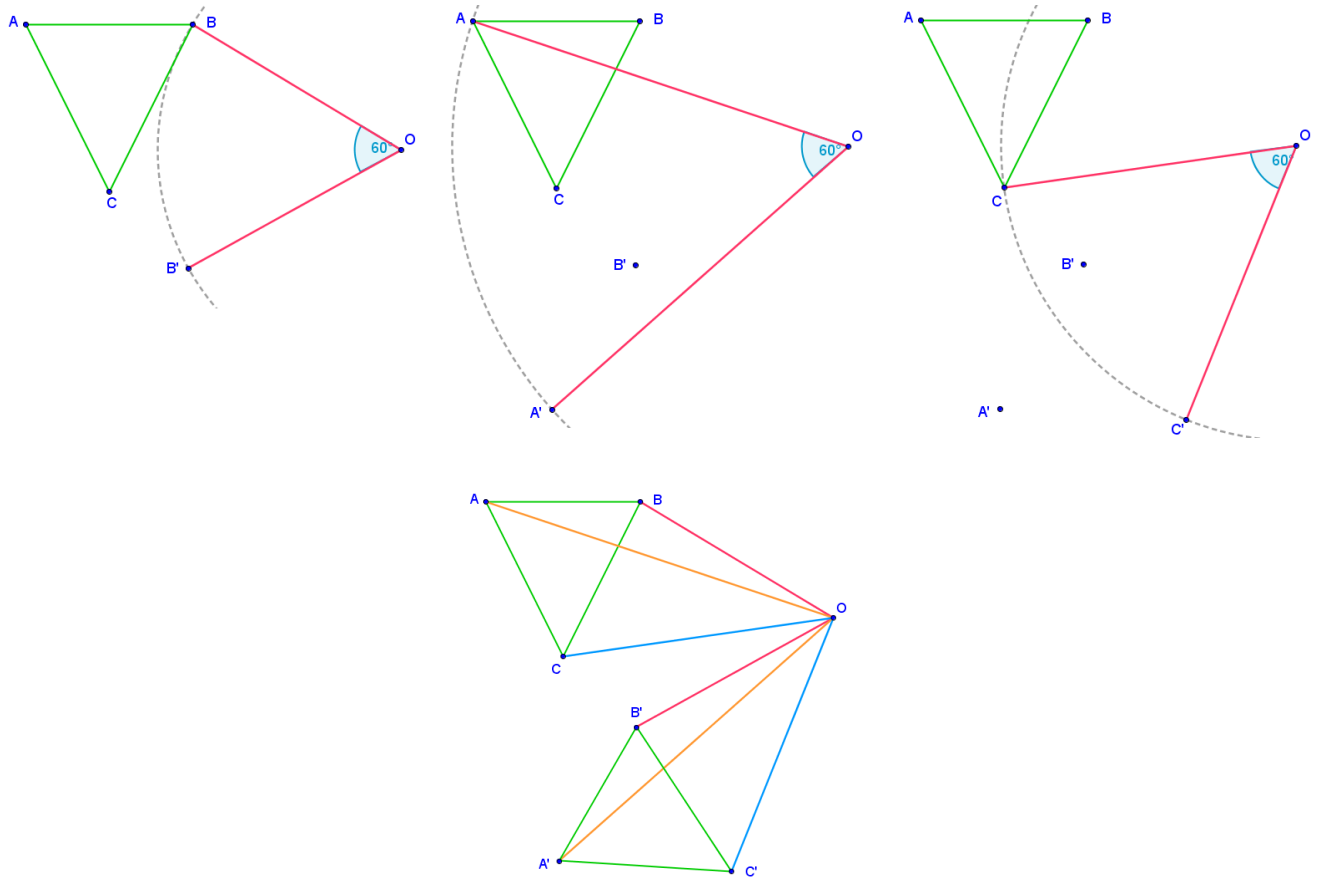
1.2. Rotación

Una rotación corresponde aquellos movimientos que hacen girar todos los puntos del plano en un cierto ángulo, por lo tanto lo que produce esta transformación es un **cambio en la orientación** de la figura con la que se está trabajando.

Las rotaciones están definidas por un **ángulo de giro** y por un **centro de rotación**, de tal forma que si el ángulo de giro es negativo la rotación se realiza a favor de las manecillas del reloj, es decir, en sentido horario, por el contrario, si el ángulo es positivo la rotación se realiza en contra de las manecillas del reloj, es decir, en sentido antihorario.

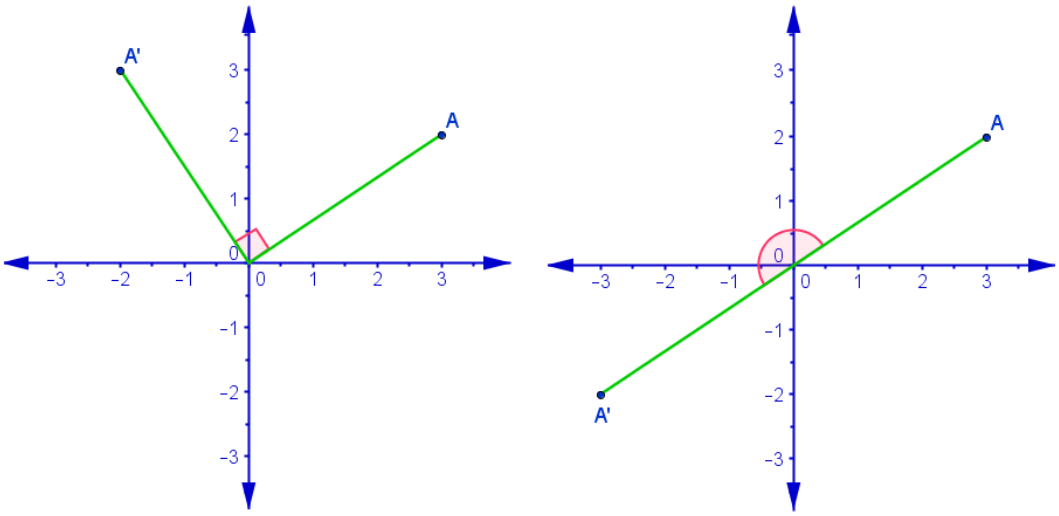
En general a las rotaciones las designamos por $R = (O, \alpha)$, donde O representa el centro de la rotación y α representa el ángulo de giro.

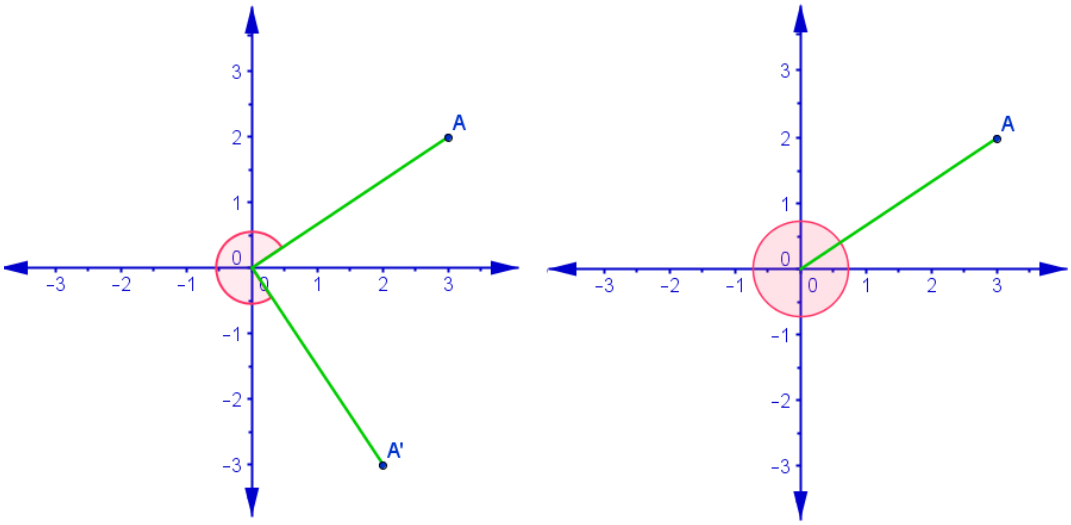
Para realizar una rotación en el plano debemos proceder de la siguiente forma. Por ejemplo, si queremos rotar el $\triangle ABC$ respecto al punto O en $60°$ debemos realizar la rotación de todos los puntos del plano. En el caso de cualquier figura basta con realizar la transformación isométrica a los vértices para obtener la imagen ya que las distancias y ángulos se conservan en la isometría. De acuerdo a esto, para realizar la rotación del vértice B del $\triangle ABC$ unimos el punto O con el vértice B y trazamos una circunferencia de centro O y radio $\overline{OB}$. Luego trazamos un ángulo de $60°$ a partir del rayo $\overline{OB}$. Finalmente el punto de intersección entre el otro rayo del ángulo de $60°$ y la circunferencia corresponde a la imagen del vértice B. Si procedemos de la misma forma para los otros dos vértices obtenemos lo siguiente:



Luego de realizada la rotación a los vértices del $\triangle ABC$ en 60° respecto al punto O obtenemos el $\triangle A'B'C'$.

Existen algunos ángulos de rotación para los cuales no es necesario realizar la construcción antes vista ya que cumplen con algunas regularidades. Por ejemplo, si queremos rotar el punto $A(3,2)$ con respecto al origen de un plano cartesiano en un ángulo de giro igual a 90°, 180°, 270° y 360° obtenemos las siguientes imágenes:





A partir de la imagen podemos ver que:

- Si al punto $A(3,2)$ le aplicamos la rotación $R = ((0,0), 90°)$ obtenemos el punto $A'(-2,3)$.
- Si al punto $A(3,2)$ le aplicamos la rotación $R = ((0,0), 180°)$ obtenemos el punto $A'(-3,-2)$.
- Si al punto $A(3,2)$ le aplicamos la rotación $R = ((0,0), 270°)$ obtenemos el punto $A'(2,-3)$.
- Si al punto $A(3,2)$ le aplicamos la rotación $R = ((0,0), 360°)$ obtenemos el mismo punto A.

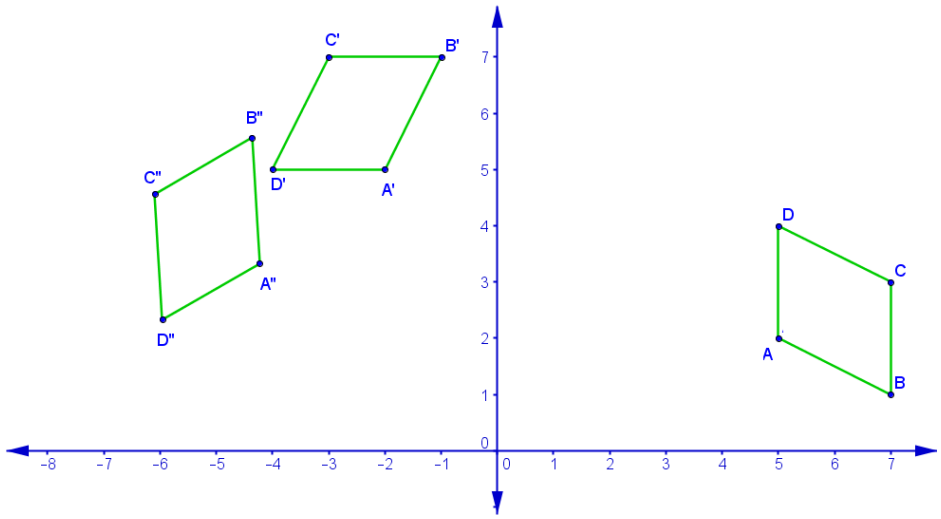
Los resultados anteriores se pueden generalizar para cualquier punto (x,y) que se rota en torno al origen del eje de coordenadas en los ángulos de 90°, 180°, 270° y 360°:

Punto inicial	$R(O,90°)$	$R(O,180°)$	$R(O,270°)$	$R(O,360°)$
(x,y)	$(-y,x)$	$(-x,-y)$	$(y,-x)$	(x,y)

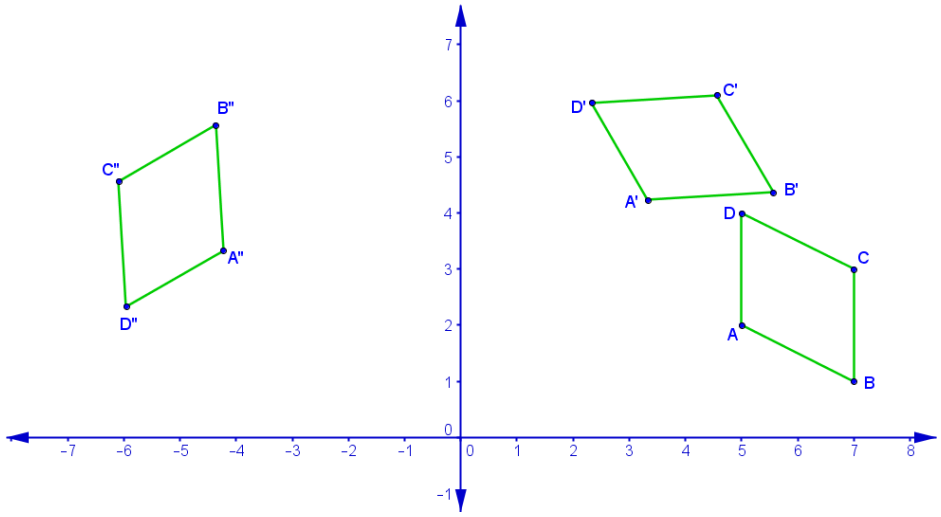
1.2.1. Composición de rotaciones

Cuando hablemos de composición de rotaciones estamos haciendo referencia a la aplicación de dos rotaciones con el mismo centro a una figura de forma consecutiva, es decir, una después de la otra.

Por ejemplo si a un trapecio $ABCD$ le aplicamos la rotación $R = ((0,0), 90°)$ y luego una rotación $R' = ((0,0), 30°)$ obtenemos el romboide $A''B''C''D''$.



Por otro lado, si al mismo trapecio $ABCD$ le aplicamos las rotaciones en sentido inverso, es decir le aplicamos la rotación $R' = ((0,0), 30°)$ y luego la rotación $R = ((0,0), 90°)$ obtenemos el mismo romboide $A''B''C''D''$.

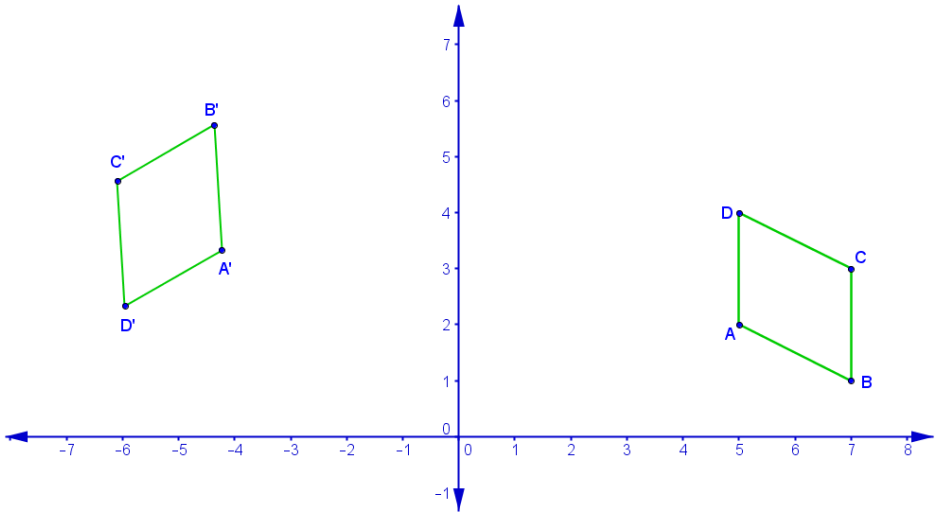


De acuerdo a lo anterior podemos decir que el orden en que se aplican las rotaciones a una figura no influye en el resultado final, ya que en ambos casos el trapecio $ABCD$ luego de las rotaciones resultó en el lugar del trapecio $A''B''C''D''$.

En la composición de rotaciones el orden en que se aplican a la figura no influye en el resultado.

$$R_{(O,\alpha)} \circ R'_{(O,\beta)} = R'_{(O,\beta)} \circ R_{(O,\alpha)}$$

Ahora bien, si al mismo trapecio $ABCD$ le aplicamos la rotación $R'' = ((0,0), 120°)$ obtenemos nuevamente el mismo trapecio $A''B''C''D''$.



En este caso podemos notar que el ángulo de rotación de R'' es igual a la suma de los ángulos de las rotaciones anteriores, es decir, $120° = 90° + 30°$, por lo tanto la aplicación de dos rotaciones se puede reducir a la aplicación de una única rotación cuyo ángulo de giro corresponde a la suma de los ángulos de las rotaciones por separado.

Toda composición de rotaciones se puede reducir a una única rotación cuyo ángulo de giro corresponde a la suma de cada ángulo de giro por separado.

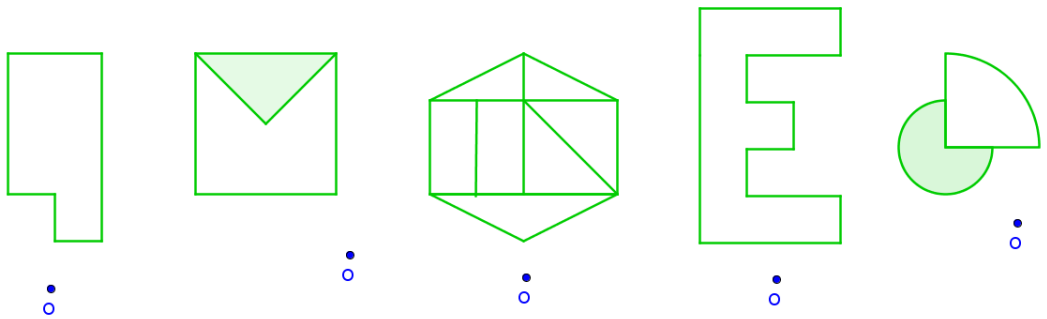
$$R_{(O,\alpha)} \circ R'_{(O,\beta)} = R''_{(O,\alpha+\beta)}$$

✍ *Ejercicios* 2

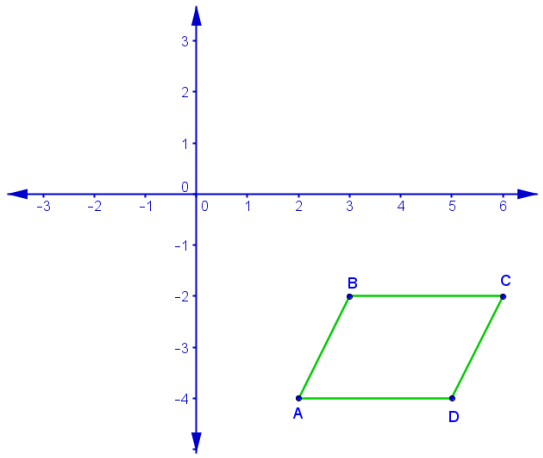
Resolver los siguientes ejercicios.

1. Si al punto $A(5,2)$ se le aplica una rotación con centro en el punto $O(1,1)$ de 180°. ¿Cuál es la nueva coordenada del punto A?

2. Bosquejar los resultados de aplicarle una rotación con centro O y ángulos de 60°, 90°, 120° y 180° a las siguientes figuras:



3. *En base a la figura resolver los siguientes ejercicios:*



a) Aplicar la rotación $R = ((0,0), 90°)$ al romboide $ABCD$.

b) Rotar el romboide $ABCD$ con respecto al punto $(3, -2)$ en $60°$.

c) Aplicar al romboide $ABCD$ la siguiente composición $R_{((1,0),20°)} \circ R'_{((1,0),100°)}$.

d) Aplicar al romboide $ABCD$ la siguiente composición $R_{((1,0),50°)} \circ R'_{((1,0),40°)} \circ R''_{((1,0),90°)}$.

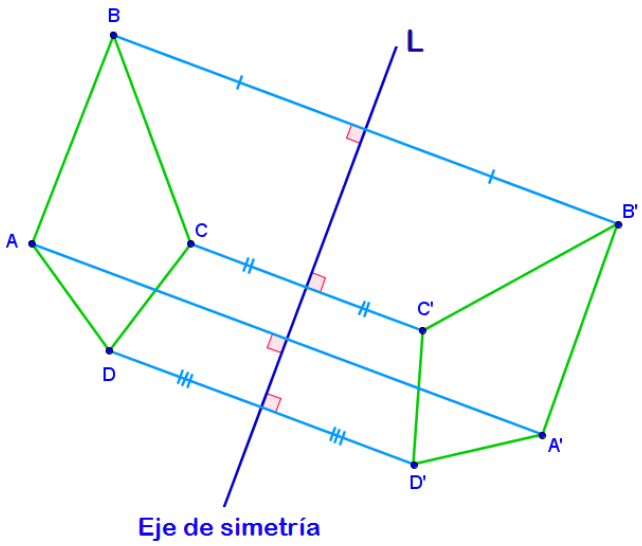
1.3. Reflexión

Una reflexión o simetría corresponde aquellos movimientos que invierten los puntos y las figuras en el plano. Esta transformación isométrica se puede dividir en simetría axial y simetría central.

1.3.1. Simetría Axial

La simetría axial corresponde aquellas reflexiones que se realizan **respecto a una recta** denominada **eje de simetría**. La característica que cumple esta reflexión es que cada punto de la figura con su respectiva imagen están a la misma distancia perpendicular del eje de simetría.

Por ejemplo, si queremos reflejar el cuadrilátero $ABCD$ respecto al eje de simetría L debemos trazar desde los 4 vértices de la figura las perpendiculares a esta recta y luego copiar la medida de cada segmento formado al otro lado de la recta tal como se muestra a continuación:

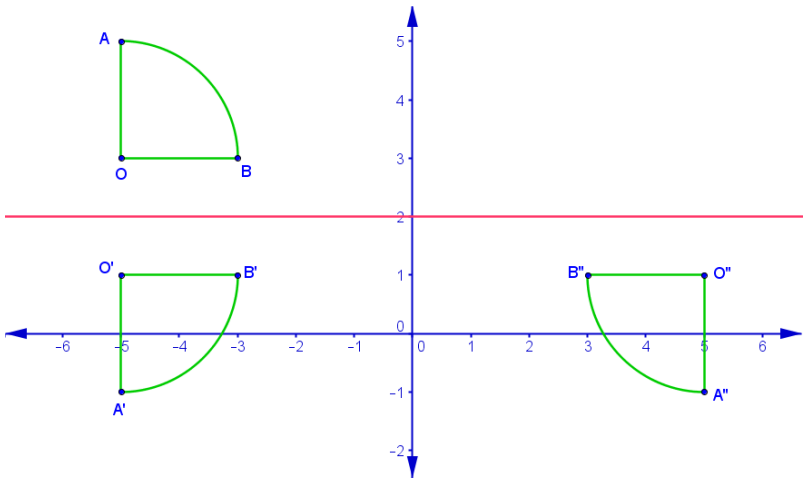


De acuerdo a esta construcción tenemos que el cuadrilátero $A'B'C'D'$ corresponde a la reflexión del cuadrilátero $ABCD$ respecto a la recta L.

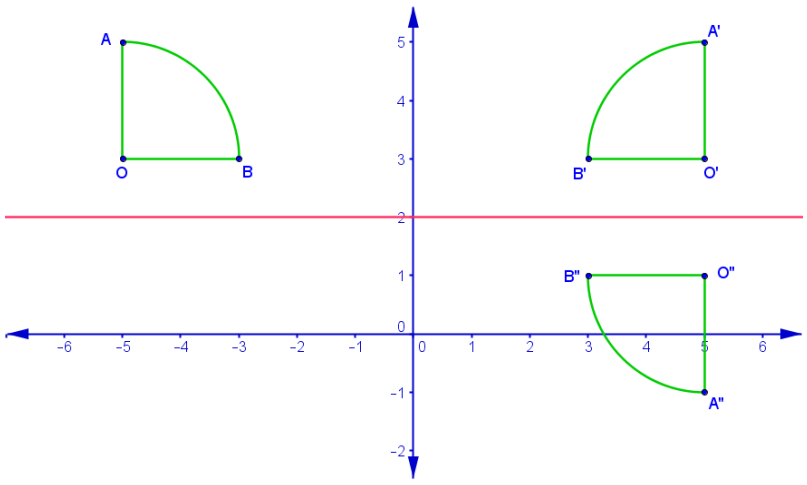
1.3.2. Composición de simetrías axiales

Cuando hablemos de composición de simetrías axiales estamos haciendo referencia a la aplicación de dos simetrías axiales a una figura de forma consecutiva, es decir, una después de la otra.

Por ejemplo, si reflejamos el sector circular OAB respecto a la recta $y = 2$ y luego respecto al eje de las ordenadas obtenemos el sector circular $O''A''B''$ que muestra la siguiente figura:



Por otro lado, si al mismo sector circular OAB le aplicamos las simetrías en orden inverso, es decir primero lo reflejamos respecto al eje de las ordenadas y luego respecto a la recta $y = 2$ obtenemos el sector círcular $O''A''B''$ que muestra la figura:



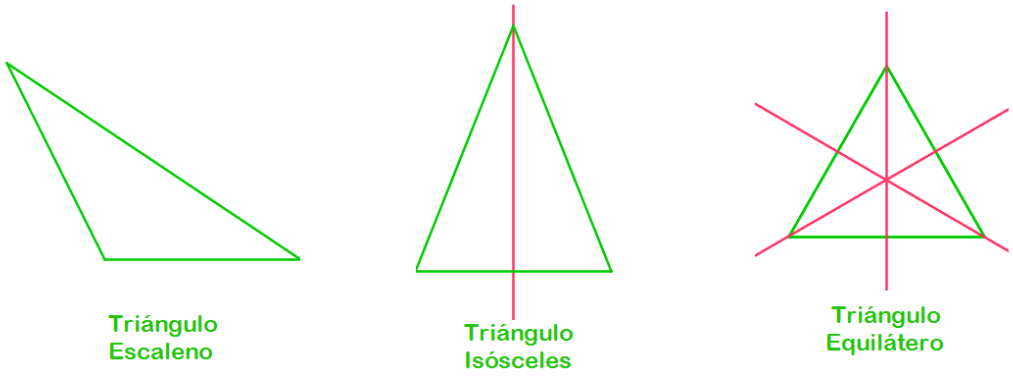
A partir de lo anterior, podemos darnos cuenta que, a diferencia de las otras dos transformaciones isométricas vistas, en la composición de relfexiónes axiales sí importa el orden de aplicación.

En la composición de simetrías axiales el orden en que se aplican a la figura si influye en el resultado.

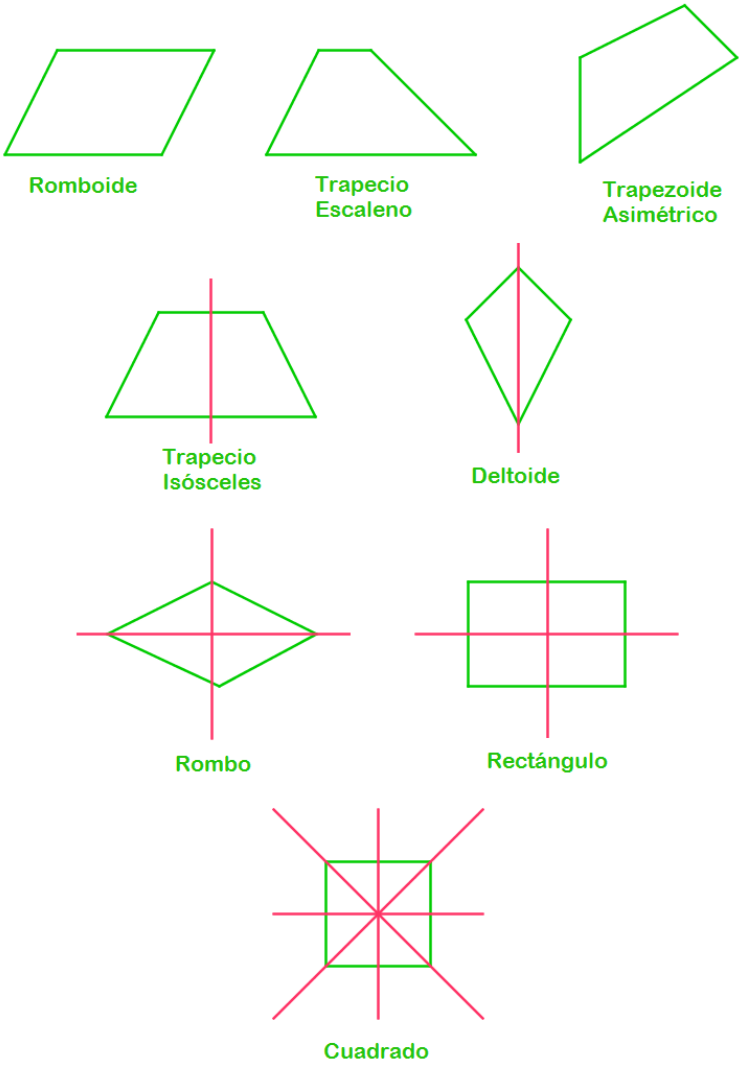
Clasificación de las figuras de acuerdo a sus ejes de simetría

Las figuras planas se pueden clasificar de acuerdo a la cantidad de ejes de simetría que se pueden trazar en su interior. A continuación mostramos la clasificación de los triángulos y los cuadriláteros según la cantidad de ejes de simetría que poseen:

Triángulos: De acuerdo al tipo de triángulo podemos tener desde 0 hasta 3 ejes de simetría.



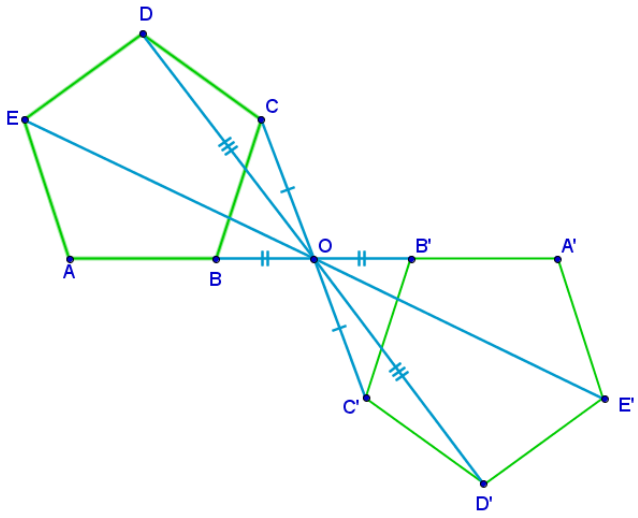
Cuadriláteros: De acuerdo al tipo de cuadrilátero podemos tener desde 0 hasta 4 ejes de simetría.



1.3.3. Simetría Central

La simetría central corresponde a las reflexiones que se realizan **respecto a un punto** llamado centro de simetría. La característica que cumple esta reflexión es que cada punto de la figura con su respectiva imagen están en una misma recta que pasa por el punto de simetría, de tal forma que los segmentos que se forman son de igual medida.

Por ejemplo, si queremos reflejar el pentágono regular $ABCDE$ con respecto el punto O debemos trazar rectas entre los vértices y el punto de simétria y luego copiar las medidas que hay entre los vértices al punto O al otro lado del punto para así formar el pentágono regular $A'B'C'D'E'$ que corresponde a la reflexión de la figura inicial.

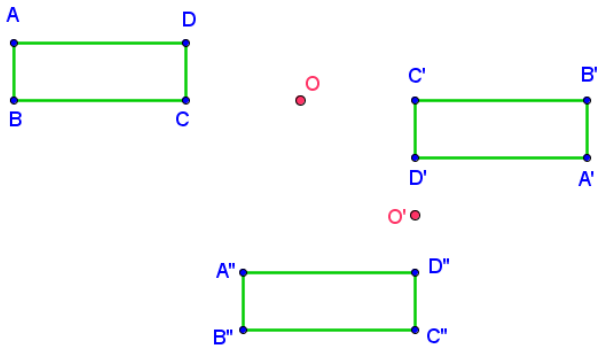


En el caso de este tipo de simetría cabe notar que corresponde a una rotación en 180° respecto al centro de simetría.

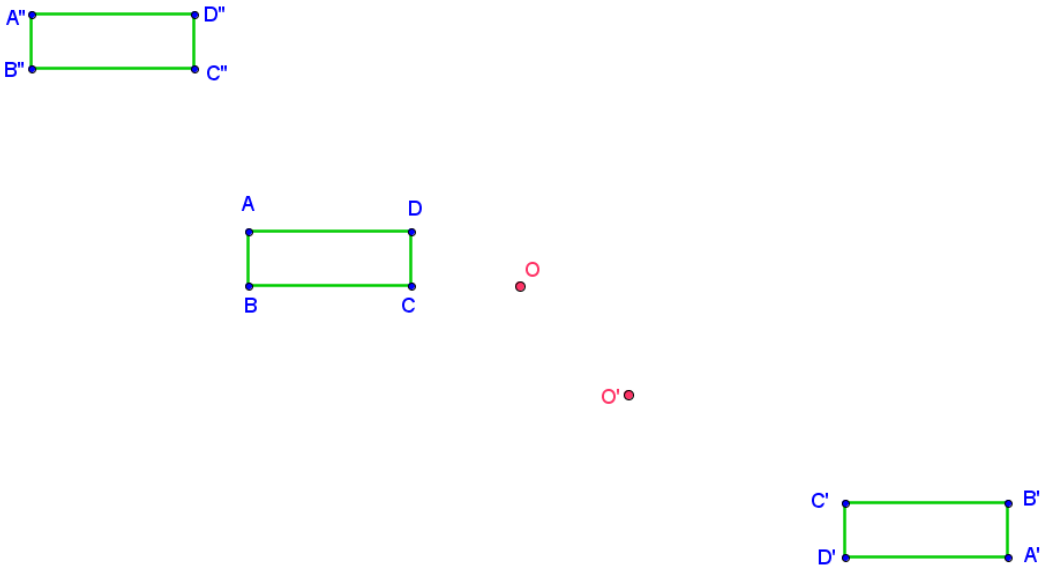
1.3.4. Composición de simetrías centrales

Cuando hablemos de composición de simetrías centrales estamos haciendo referencia a la aplicación de dos simetrías centrales a una figura de forma consecutiva, es decir, una después de la otra.

Por ejemplo, si reflejamos el rectángulo $ABCD$ respecto al punto O y luego respecto al punto O' obtenemos el rectángulo $A''B''C''D''$ que se muestra en la figura:



Por otro lado, si realizamos las rotaciones en sentido inverso sobre el mismo rectángulo $ABCD$, es decir si primero reflejamos la figura respecto al punto O' y luego la reflejamos respecto al punto O obtenemos el rectángulo $A''B''C''D''$ que se muestra a continuación:



A partir de lo anterior, podemos notar que al igual que con la simtería axial, en la composición de simetrías centrales si influye el orden en que reflejo mi figura.

En la composición de simetrías centrales el orden en que se aplican a la figura si influye en el resultado.

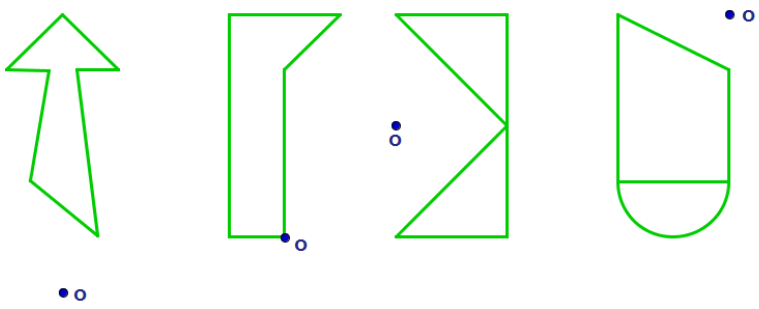
✍ *Ejercicios* 3

Resolver los siguientes ejercicios.

1. Un triángulo con vértices $A(3,3)$, $B(4,8)$ y $C(-1,6)$ se refleja respecto al eje de las abscisas. ¿Cuáles son los vértices del nuevo triángulo?

2. Un polígono con vértices $A(-6,0)$, $B(2,4)$, $C(1,2)$ y $D(5,-3)$ se refleja respecto al eje de las ordenadas. ¿Cuáles son los vértices del nuevo polígono?

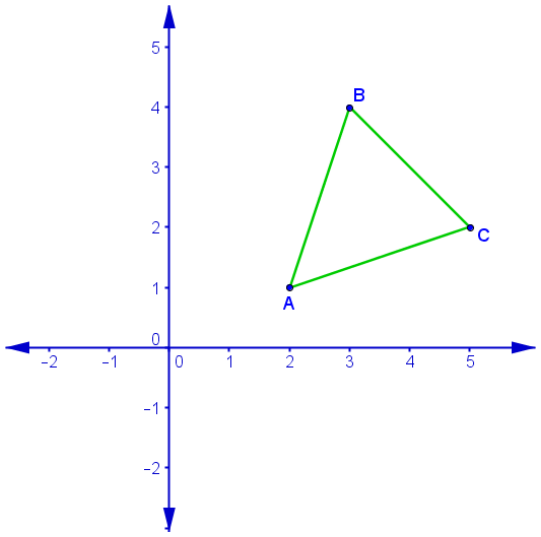
3. Realizar la simetría central respecto al punto O de las siguientes figuras:



4. Trazar los ejes de simetría de las siguientes figuras:



5. *En base a la figura resolver los siguientes ejercicios:*



a) Aplicar una reflexión al triángulo ABC respecto al eje de las ordenadas y luego respecto al eje de las abscisas.

b) Aplicar una reflexión al triángulo ABC respecto a la recta $y = x$.

c) Aplicar una reflexión al triángulo ABC respecto a la recta $x = 3$.

Desafío 1



¿Es cierto que si a una figura le aplico una traslación y luego una rotación la imagen formada es igual a la imagen formada al aplicar primero la rotación y luego la traslación ?

Respuesta

2. Teselación del plano



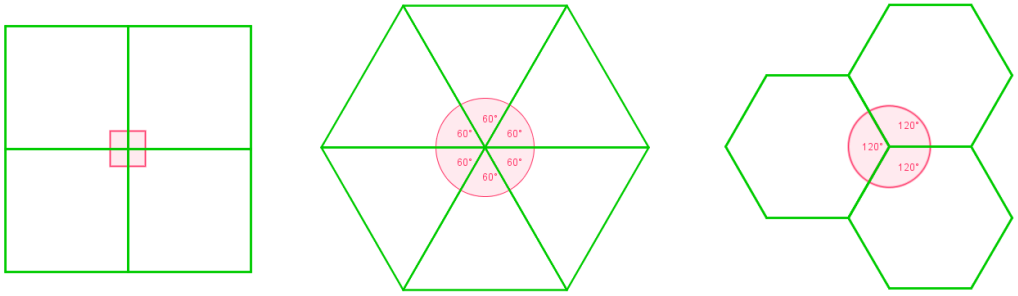
Como se dijo al comienzo de la guía las transformaciones isométricas fueron y son utilizadas por muchos artistas para sus creaciones, dentro de ellas destaca el mosaico que corresponde a rellenar un plano mediante la repeticion de una o más figuras que encajan perfectamente unas con otras.

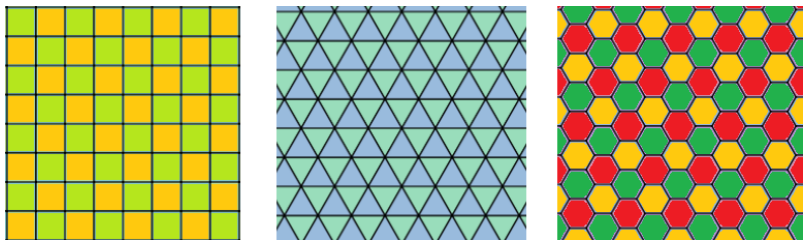
Dentro de las características fundamentales de una teselación se encuentra que no puede haber lugares en el plano que esten vacíos y que las figuras con las cuales se está rellenado el plano no se pueden superponer entre sí.

2.1. Teselación regular

Cuando hablamos de una teselación regular o de recubrimientos regulares estamos haciendo referencia al cubrimiento de un plano a través de un sólo tipo de polígono regular.

Existen solo tres polígonos regulares que me permiten teselar un plano. Estos son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular ya que son los únicos polígonos que al unir sus vértices forman un ángulo de 360° con sus ángulos interiores.





Desafío 2



¿Por qué no se puede teselar un plano con un pentágono regular ?

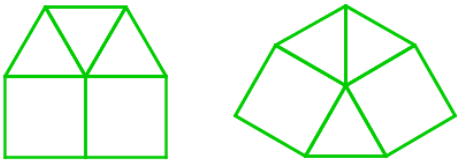
Respuesta

2.2. Teselación semiregular

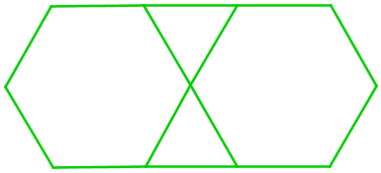
Cuando hablamos de una teselación semiregular o de recubrimientos semiregulares estamos haciendo referencia al cubrimiento de un plano mediante dos o más polígonos regulares. Dentro de las características que podemos destacar de estas teselaciones es que el arreglo de polígonos en cada vértice es siempre la misma.

A continuación mostramos las 8 combinaciones posibles para embaldosar un plano:

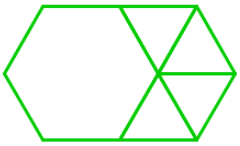
- Tres triángulos equiláteros y dos cuadrados.



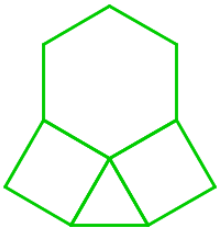
- Dos triángulos equiláteros y dos hexágonos regulares.



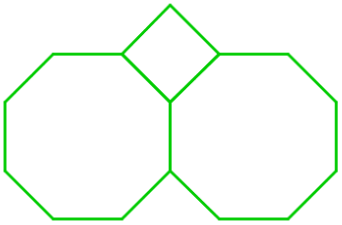
- Cuatro triángulos equiláteros y un hexágono regular.



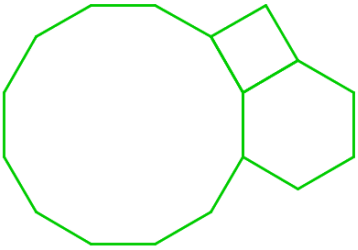
- Un triángulo equilátero, dos cuadrados y un hexágono regular.



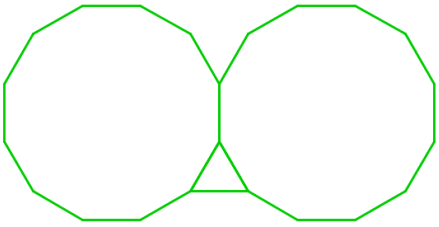
- Dos octógonos y un cuadrado.

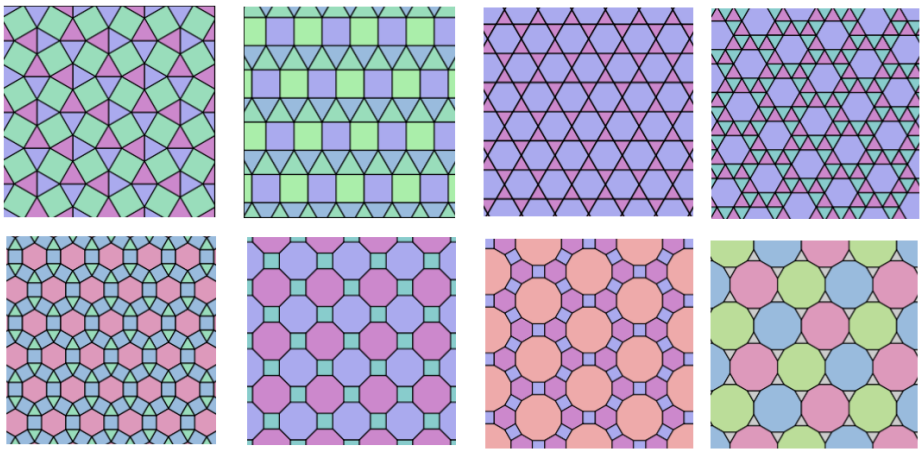


- Un dodecágono regular, un cuadrado y un hexágono regular.



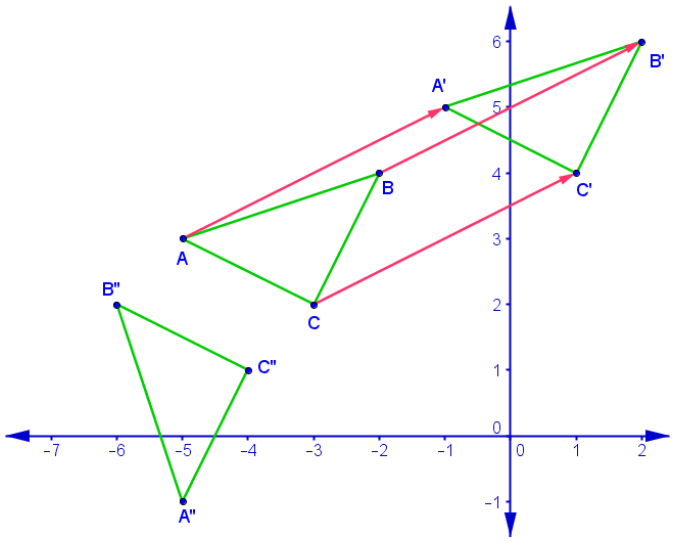
- Dos dodecágonos regulares y un triángulo equilátero.



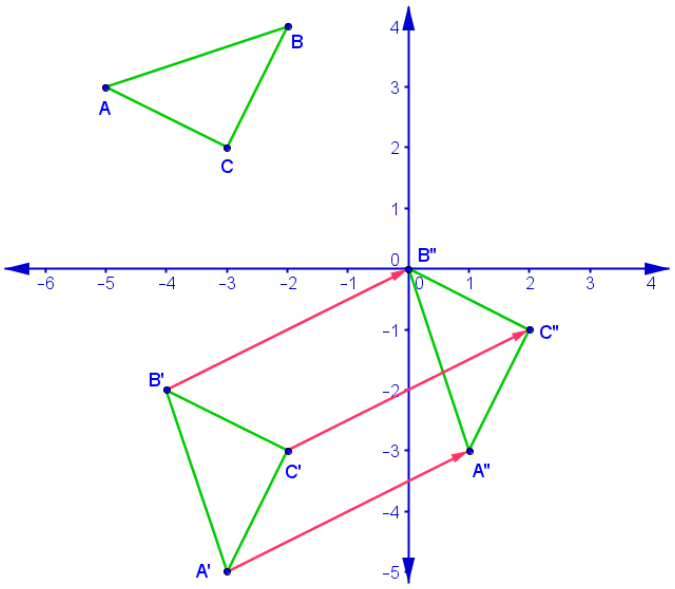


Desafíos resueltos

✓ Desafío I: La afirmación no es cierta. Por ejemplo si trasladamos el $\triangle ABC$ de la figura respecto al $\vec{v} = (4, 2)$ y luego lo rotamos respecto al origen en 90° obtenemos el $\triangle A''B''C''$ que se muestra a continuación:

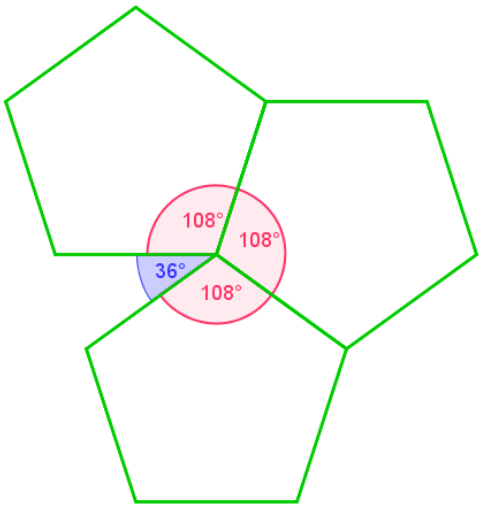


Ahora si cambiamos el orden, es decir, si rotamos en 90° respecto al origen al $\triangle ABC$ y luego lo trasladamos respecto al vector $\vec{v} = (4, 2)$ obtenemos el $\triangle A''B''C''$ que se muestra a continuación:



A partir de las imágenes podemos darnos cuentas que los resultados de las composiciones no es el mismo, por lo tanto el componer una traslación con una rotación importa el orden en que se aplican las transformaciones isométricas. Volver

✓ Desafío II: No se puede teselar un plano con un pentágono regular ya que al unir 3 de sus vértices se forma un ángulo de 324° y faltaría rellenar un espacio de 36° que no lo logra cubrir de ninguna forma.



Volver

Bibliografía

[1] Manual de preparación PSU Matemática, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.

[2] Libro para el maestro, *Segunda Edición, 2001*,
Jesús Alarcón Bortolussi, Elisa Bonilla Rius, Rocío Nava Álvarez, Teresa Rojano Cevallos, Ricardo Quintero.