open green road

Guía Matemática

Variable aleatoria discreta

tutor: Ismael Saldaña Caro

puntaje nacional.cl

1. Variable aleatoria

Sobre una mesa se han colocado todas las fichas de un dominó (mostradas en la figura 1). Se extrae una al azar y se calcula el valor absoluto de la diferencia de sus puntuaciones. Se desea determinar la probabilidad de que dicha diferencia sea igual a 4.

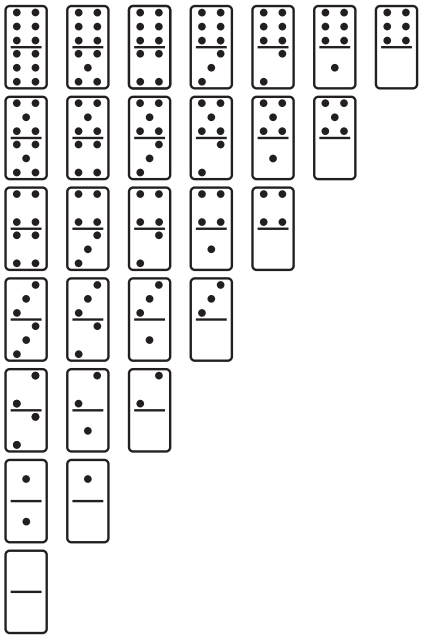


Figura 1. Fichas de un juego de dominó.

El **experimento** consiste en extraer una ficha de un dominó y calcular el valor absoluto de la diferencia de sus puntuaciones. Dicho experimento tiene como **espacio muestral** (Ω) cada una de las 28 fichas que componen el dominó.

La figura 2 muestra el valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones para cada una de las fichas. Puesto que estamos interesados en que dicha diferencia sea 4, a partir de la figura 2 se establece que los **casos favorables** son 3. Por otro lado, los casos totales (o posibles) son 28, correspondientes a la diferencia de cada una de las 28 fichas del dominó. Luego, por la regla de Laplace, la probabilidad buscada es:

$$\mathrm{P(E)} = \frac{\text{casos favorables a E}}{\text{casos totales}} = \frac{3}{28}$$

Donde E corresponde al **evento** (o suceso) definido tal que el valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó es igual a 4.

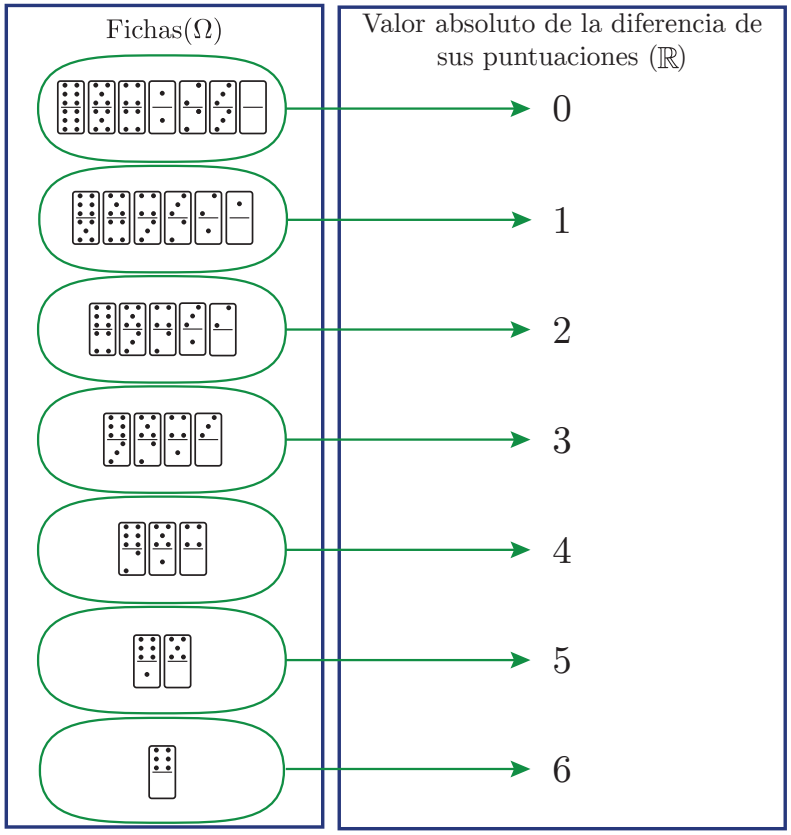


Figura 2. Valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones para cada una de las fichas del dominó.

En particular, el cálculo anterior sirve cuando la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó es igual a 4. No obstante, si quisiéramos conocer la probabilidad para cuando dicha diferencia es igual a 0, 1, ... , 6, se deben definir los siguientes sucesos:

A: El valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó es 0

B: El valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó es 1

C: El valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó es 2

D: El valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó es 3

E: El valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó es 4

F: El valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó es 5

G: El valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó es 6

El problema radica en que se debe definir un suceso para cada resultado posible del experimento y los cálculos se vuelven innecesariamente extensos. Buscamos entonces una forma compacta de representar los cálculos previos, que además nos permita operar y visualizar el problema de forma sencilla y eficiente. El primer paso es crear un "suceso variable", de tal forma que los 7 sucesos definidos anteriormente (A, B, ... , G) queden contenidos en él. A dicho suceso le llamaremos **variable aleatoria** (v.a.), la cual representaremos preferentemente por X, Y, Z o de cualquier otra forma conveniente.

En el ejemplo de las fichas de dominó, la variable aleatoria X queda definida por "el valor absoluto de la diferencia de sus puntuaciones", esto es:

X: El valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de las fichas del dominó.

Advierta que la definición de X efectivamente contempla todos los eventos definidos previamente. En este sentido, los valores que puede tomar X son 0, 1, 2, ... , 6.

Entonces, lo que hace una variable aleatoria es relacionar los elementos del espacio muestral (cada una de fichas del dominó) con un número real (la diferencia de sus puntuaciones), tal como muestra la figura 2.

Por otra parte, una función (f) es una relación entre elementos de un conjunto de origen (dominio) y elementos de un conjunto de llegada (codominio o recorrido), de forma que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del recorrido.

Luego, la variable aleatoria es una función (en este caso X) cuyo dominio son los elementos del espacio muestral y cuyo recorrido son los valores reales ($\mathbb{R}$) que ésta puede adoptar según cómo se defina, esto es:

$$\mathrm{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longrightarrow \mathrm{X}(\omega) = x_i$$

Donde ω corresponde a cada uno de los sucesos del espacio muestral Ω, y $\mathrm{X}(\omega) = x_i$ corresponde al valor x_i que toma X para un ω particular, donde $i = 1, 2, \ldots, n$, siendo n la cantidad de elementos del recorrido de la función X.

La variable aleatoria es una función cuyo dominio corresponde al espacio muestral del experimento, mientras que su recorrido corresponde a cada uno de los valores que puede tomar según por cómo se defina. Regularmente se representa por X, Y o Z.

Volviendo al ejemplo del dominó, se definió X como "el valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de la ficha extraída". Así, el dominio de X corresponde a cada una de las 28 fichas que lo componen (el espacio muestral completo), mientras que su recorrido corresponde a todos los posibles valores del valor absoluto de la diferencia de sus puntuaciones:

$$\mathrm{Dom\ X} = \Omega$$

$$\mathrm{Rec\ X} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Finalmente, según su naturaleza, una variable aleatoria se puede clasificar como discreta o continua.

1.1. Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria discreta es aquella cuyo recorrido es finito o infinito numerable. Por ejemplo, la diferencia de las puntuaciones de una ficha de dominó, la suma de las puntuaciones obtenidas al lanzar dos o más dados, el número de caras/sellos obtenidos al lanzar dos o más monedas, la pinta de una baraja de naipes, etcétera. Se distingue entre variable aleatoria cualitativa (se refiere a características o cualidades del espacio muestral del experimento) y variable aleatoria cuantitativa (se puede expresar numéricamente).

1.2. Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria continua es aquella cuyos elementos del recorrido son **NO** numerables (no se les puede asignar un orden). Una variable aleatoria continua es la que puede tomar cualquier valor numérico en un intervalo o conjunto de intervalos. Por ejemplo, las estaturas de los estudiantes de un colegio, el tiempo de frecuencia de los trenes del Metro de Santiago, el peso de los integrantes de una familia, etcétera. Todos estos ejemplos tienen en común que la exactitud de la medición depende de los instrumentos con que se cuente, de manera que siempre se puede llegar a una medición más precisa.

Una variable aleatoria puede ser discreta o continua. Es discreta cuando los elementos del recorrido son finitos o infinitos numerables. Es continua cuando los elementos del recorrido son no numerables. Al mismo tiempo, la variable aleatoria puede ser de tipo cualitativa o cuantitativa.

✎ ***Ejemplo***

- Sea X una variable aleatoria definida por la "cantidad de caramelos vencidos en un cargamento de 50 caramelos". Los posibles valores de X son 1, 2, 3, ... , 48, 49, 50, por lo que se trata de una variable aleatoria discreta finita.
- Sea Y una variable aleatoria definida por la "cantidad de automóviles que transitan en un tramo de una carretera". Los posibles valores de Y están en el conjunto $\mathbb{N}$ (1, 2, 3, ...), por lo que se trata de una variable aleatoria discreta infinita.
- Sea Z una variable aleatoria definida por la "cantidad de segundos que hay que esperar hasta que pase un automóvil en un tramo de una carretera". Los posibles valores de Z están en el conjunto $\mathbb{R}^+$, es decir, $Z \in]0, \infty[$, por lo que se trata de una variable aleatoria continua.
- Sea W una variable aleatoria definida por la "cantidad de ases que se obtienen al extraer tres cartas de un naipe inglés". Los posibles valores de W son 0, 1, 2, 3, por lo que se trata de una variable aleatoria discreta finita.

---

2. Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Nos interesa ahora obtener la probabilidad asociada a cada uno de los valores que puede adoptar X, o equivalentemente, a cada uno de los elementos de su recorrido. Para ello, se procede de manera usual mediante la regla de Laplace:

$$P(X = x_i) = \frac{\text{Casos favorables a } X = x_i}{\text{Cardinalidad de } \Omega}$$

Con ayuda de la figura 2 se obtienen las probabilidades buscadas, las cuales conforman la **función de probabilidad** de la v.a. X (o simplemente función de probabilidad) y cuya representación puede ser como valores puntuales (tabla 1) o como una expresión algebraica:

$$f(x_i) = \mathrm{P(X = x_i)} \begin{cases} \frac{7}{28} & \text{si X} = 0 \\ \frac{6}{28} & \text{si X} = 1 \\ \frac{5}{28} & \text{si X} = 2 \\ \frac{4}{28} & \text{si X} = 3 \\ \frac{3}{28} & \text{si X} = 4 \\ \frac{2}{28} & \text{si X} = 5 \\ \frac{1}{28} & \text{si X} = 6 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

Tabla 1. Probabilidad asociada a cada uno de los valores que puede adoptar X.

X	Frecuencia absoluta	$f(x_i) = \mathrm{P(X = x_i)}$
0	7	$f(0) = \mathrm{P(X = 0)} = \frac{7}{28}$
1	6	$f(1) = \mathrm{P(X = 1)} = \frac{6}{28}$
2	5	$f(2) = \mathrm{P(X = 2)} = \frac{5}{28}$
3	4	$f(3) = \mathrm{P(X = 3)} = \frac{4}{28}$
4	3	$f(4) = \mathrm{P(X = 4)} = \frac{3}{28}$
5	2	$f(5) = \mathrm{P(X = 5)} = \frac{2}{28}$
6	1	$f(6) = \mathrm{P(X = 6)} = \frac{1}{28}$
Total	28	1

Advierta la relación existente entre cada uno de los valores que puede tomar X y su probabilidad, la cual aprovecharemos para expresar la función de probabilidad de forma más compacta:

$$f(x_i) = \mathrm{P(X = x_i)} \begin{cases} \dfrac{7-x}{28} & \text{si X} = 0, 1, \ldots, 6 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

Note que el dominio de la función de probabilidad de la v.a. son los valores que toma X (recorrido de X), mientras que su recorrido son los reales positivos comprendidos entre 0 y 1. Finalmente, tenga presente que la suma de las probabilidades asociadas a cada valor de X debe ser 1, ¿por qué?

Otra forma de representar la función de probabilidad es mediante una gráfica en el plano cartesiano, donde los valores que toma la variable aleatoria se ubican en el eje de las abscisas y su respectiva probabilidad se representa en el eje de las ordenadas.

La representación gráfica de la función de probabilidad de X se ilustra en la figura 3. En ella se aprecia que es más probable extraer un "chancho" (una ficha cuyas puntuaciones son iguales), y que la probabilidad disminuye a medida que aumenta la diferencia de sus puntuaciones.

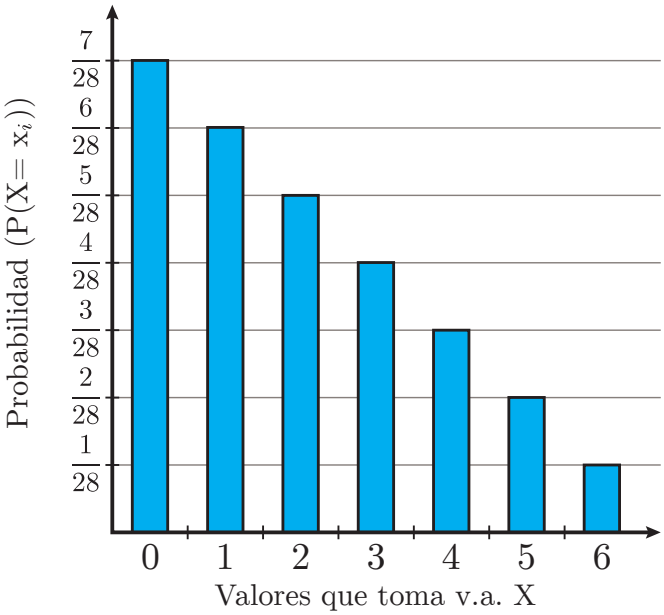


Figura 3. Gráfica de la función de probabilidad de X.

3. Variable aleatoria discreta cualitativa

En el ejemplo del dominó, X es una variable aleatoria discreta cuantitativa, ya que su recorrido puede ser expresado numéricamente. Pero, ¿qué pasa cuando se define una variable aleatoria cualitativa? ¿cómo se representa? Veamos un ejemplo:

En una canasta hay 4 manzanas, 3 peras y 3 naranjas. Se extrae una fruta al azar y se define la variable aleatoria Y como "tipo de fruta extraída". ¿Cuál es la función de probabilidad de Y?

El recorrido de la variable aleatoria Y son todos aquellos valores que puede tomar. En este caso, al seleccionar una fruta de la canasta ésta puede ser una manzana, una pera o una naranja. Así, el recorrido de Y es "manzana", "pera" y "naranja". No obstante, Y es una función cuyo recorrido (de acuerdo a la definición previa) son los números reales. Para solucionar este problema vamos a asociar un número real a cada uno de los valores del recorrido de Y. Por ejemplo, vamos a asociar "manzana" con 0, "pera" con 1 y "naranja" con 2. Luego, el recorrido de Y es:

$$\text{Rec Y} = \{0,\ 1,\ 2\}$$

Cuando los valores que puede tomar una variable aleatoria son cualitativos, se debe asociar cada uno de ellos con un valor real.

Al extraer una fruta de la canasta, 10 son los casos posibles (correspondientes a la cardinalidad del espacio muestral). Por otro lado, los casos favorables para Y = 0 son 4, para Y = 1 son 3 y finalmente para Y = 2 son 3. Aplicando la regla de Laplace se obtiene la función de probabilidad de Y:

$$f(y_i) = \text{P(Y} = y_i) \begin{cases} \dfrac{4}{10} & \text{si Y} = 0 \\ \dfrac{3}{10} & \text{si Y} = 1 \\ \dfrac{3}{10} & \text{si Y} = 2 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

Note que efectivamente la suma de las probabilidades asociadas a cada valor de la variable aleatoria es 1:

$$\begin{aligned} \text{P(Y} = 0) + \text{P(Y} = 1) + \text{P(Y} = 2) &= 1 \\ \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} &= 1 \\ \frac{4+3+3}{10} &= 1 \\ \frac{10}{10} &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

La representación gráfica de la función de probabilidad de Y se ilustra en la figura 4. En ella se aprecia que es más probable extraer de la canasta una manzana, mientras que es igual de probable extraer una pera que una naranja.

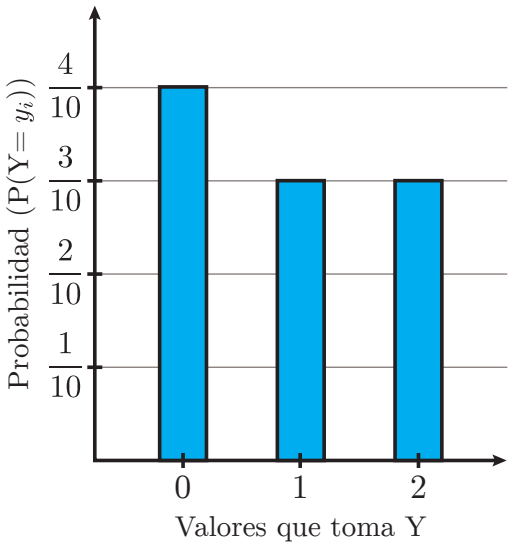


Figura 4. Gráfica de la función de probabilidad de Y.

La función de probabilidad de una variable aleatoria X es otra función que nos entrega la probabilidad asociada a cada valor de X. Su dominio corresponde a los valores que toma X, mientras que su recorrido corresponde a los números reales comprendidos entre 0 y 1. La suma de las probabilidades asociadas a cada valor de X debe ser 1.

La función de probabilidad de una variable aleatoria se puede representar mediante una tabla resumen, una expresión algebraica o un gráfico. Este último permite observar de mejor manera cómo se distribuye la probabilidad para cada uno de los elementos del recorrido de la variable aleatoria.

Desafío 1



Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad está definida como:

$$f(\mathrm{x}_i) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}_i) \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{si } \mathrm{X} = 1 \\ a & \text{si } \mathrm{X} = 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } \mathrm{X} = 3 \\ b & \text{si } \mathrm{X} = 4 \\ \frac{2}{9} & \text{si } \mathrm{X} = 5 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

Donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a > b$. Si la diferencia entre las probabilidades asociadas a $\mathrm{X} = 2$ y $\mathrm{X} = 4$ es $\frac{1}{9}$, ¿cuál es el valor de a y b?

Respuesta

4. Función de distribución de probabilidad

Los valores acumulados de probabilidad de una variable aleatoria conforman lo que se denomina función de distribución de probabilidad. En otras palabras, la función de distribución nos indica la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales que un valor específico.

El dominio de la función de distribución de probabilidad son los racionales (las probabilidades obtenidas de la función de probabilidad), mientras que su recorrido son los reales comprendidos entre 0 y 1.

Volviendo al ejemplo del dominó, se desea obtener la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores iguales o menores que 3 (recuerde que la variable aleatoria X queda definida por "el valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones" de la ficha del dominó). Para ello vamos a considerar la función de probabilidad de X definida previamente:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) &= \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) \\ \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) &= \frac{7}{28} + \frac{6}{28} + \frac{5}{28} + \frac{4}{28} \\ \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) &= \frac{22}{28} \\ \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) &= \frac{11}{14} \end{aligned}$$

Es decir, la probabilidad de que al extraer una ficha del dominó, el valor absoluto de la diferencia de sus puntuaciones sea menor o igual a 3 es $\frac{11}{14}$.

De la misma forma se obtienen las probabilidades acumuladas restantes, definiendo así la función de distribución de probabilidad de X, representada en la tabla 2 y por su expresión algebraica:

$$\mathrm{F}(x_i) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}_i) \begin{cases} \frac{7}{28} & \text{si } \mathrm{X} \leq 0 \\ \frac{13}{28} & \text{si } \mathrm{X} = 1 \\ \frac{18}{28} & \text{si } \mathrm{X} = 2 \\ \frac{22}{28} & \text{si } \mathrm{X} \leq 3 \\ \frac{25}{28} & \text{si } \mathrm{X} \leq 4 \\ \frac{27}{28} & \text{si } \mathrm{X} \leq 5 \\ 1 & \text{si } \mathrm{X} \leq 6 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

Tabla 2. Probabilidad acumulada asociada a cada uno de los valores que pueda adoptar X.

X	Frecuencia absoluta	$f(x_i) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	$\mathrm{F}(x_i) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}_i)$
0	7	$\frac{7}{28}$	$\mathrm{F}(0) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 0) = \frac{7}{28}$
1	6	$\frac{6}{28}$	$\mathrm{F}(1) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) = \frac{13}{28}$
2	5	$\frac{5}{28}$	$\mathrm{F}(2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 2) = \frac{18}{28}$
3	4	$\frac{4}{28}$	$\mathrm{F}(3) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) = \frac{22}{28}$
4	3	$\frac{3}{28}$	$\mathrm{F}(4) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 4) = \frac{25}{28}$
5	2	$\frac{2}{28}$	$\mathrm{F}(5) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 5) = \frac{27}{28}$
6	1	$\frac{1}{28}$	$\mathrm{F}(6) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 6) = 1$
Total	28	1	

La representación gráfica de la función de distribución de probabilidad de X se ilustra en la figura 5.

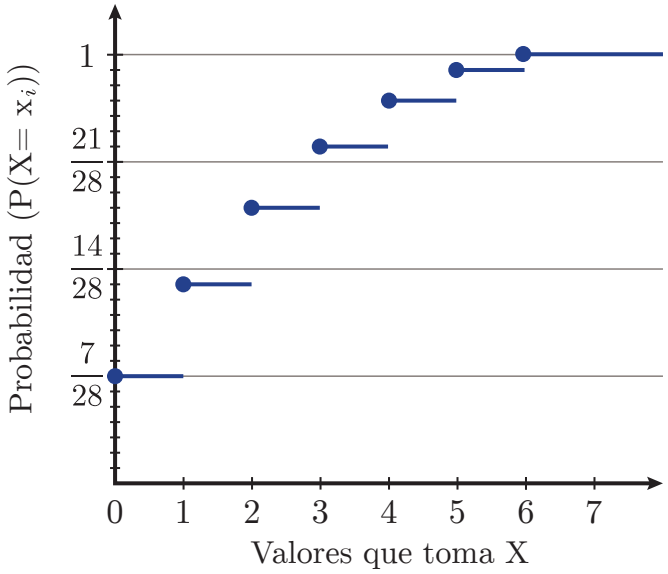


Figura 5. Gráfica de la función de distribución de probabilidad de X.

La función de distribución de probabilidad indica los valores acumulados de probabilidad de la variable aleatoria. Al igual que la función de probabilidad, la función de distribución se puede representar mediante una tabla resumen, una expresión algebraica o un gráfico.

✎ ***Ejemplo***

1. En una bolsa se han colocado 5 bolitas numeradas del 1 al 5. Se extraen dos bolitas sin reposición y se define la variable aleatoria X como el "valor absoluto de la diferencia de sus numeraciones", cuya función de probabilidad es:

$$f(x_i) = P(X = x_i) \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{si } X = 1 \\ \frac{3}{10} & \text{si } X = 2 \\ \frac{1}{5} & \text{si } X = 3 \\ \frac{1}{10} & \text{si } X = 4 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

Al respecto, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El valor absoluto de la diferencia de las numeraciones de las bolitas extraídas puede ser 1, 2, 3 ó 4

II) Es más probable extraer dos bolitas cuyas numeraciones sean consecutivas

III) La probabilidad de que X sea menor o igual que 2 es $\frac{7}{10}$

Solución:
Veamos la veracidad de cada una de las afirmaciones:

I) *El valor absoluto de la diferencia de las numeraciones de las bolitas extraídas puede ser 1, 2, 3 ó 4.*

De la función de probabilidad se observa que X puede tomar solo los valores 1, 2, 3 ó 4. Por otro lado, dada la definición de X (valor absoluto de la diferencia de las numeraciones de las bolitas extraídas), se concluye que la afirmación es verdadera. Al mismo tiempo, recuerde que los valores que puede tomar X corresponden a su recorrido.

II) *Es más probable extraer dos bolitas cuyas numeraciones sean consecutivas.*

A partir de la función de probabilidad vemos que es más probable que X tome el valor 1. Por otro lado, dicha diferencia se da exclusivamente entre números consecutivos, de modo que la afirmación es verdadera.

III) *La probabilidad de que X sea menor o igual que 2 es 7/10.*

Matemáticamente se cumple que $P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$. Luego, reemplazando en la igualdad de acuerdo con la función de probabilidad, se tiene:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ P(X \leq 2) &= \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \\ P(X \leq 2) &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Así, la afirmación es verdadera.

2. Se escogen, al mismo tiempo, 5 letras al azar de la palabra MURCIÉLAGO y se define la variable aleatoria Z como el "número de vocales" escogidas. Determinar la cardinalidad del dominio, recorrido, función de probabilidad y función de distribución de probabilidad de Z.

Solución:
Antes de comenzar, tenga presente que al escoger las 5 letras al azar, no estamos interesados en el orden en que éstas aparezcan, puesto que se seleccionan al mismo tiempo y además por la propia definición de Z.

• Dominio de Z:

El dominio de Z corresponde al espacio muestral (Ω) del experimento, es decir, a todos los conjuntos de 5 letras que se pueden formar con la palabra MURCIÉLAGO. Cabe destacar que dicha palabra está conformada por letras diferentes entre sí, de modo que el número de conjuntos que se pueden formar se obtiene mediante una combinación de 5 elementos sobre un total de 10, esto es:

$$C_5^{10} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = 252$$

Es decir, se pueden formar 252 conjuntos de 5 letras, todos diferentes entre sí. Llegado a este punto, solo nos restaría escribir cada uno de los conjuntos, pero dado que en realidad sólo nos interesa la cardinalidad del espacio muestral (252), no vamos a entrar en detalle.

• Recorrido de Z:

Z se define como el "número de vocales" presentes luego de seleccionar las 5 letras de la palabra MURCIÉLAGO. Por otro lado, dicha palabra es muy particular, pues está compuesta por 5 consonantes y 5 vocales diferentes entre sí. De este modo, puede darse el caso en que las 5 letras seleccionadas sean consonantes ($Z = 0$), 4 consonantes y 1 vocal ($Z = 1$), 3 consonantes y 2 vocales ($Z = 2$), 2 consonantes y 3 vocales ($Z = 3$), 1 consonante y 4 vocales ($Z = 4$) o que todas sean vocales ($Z = 5$).

Con lo anterior, el recorrido de Z es:

$$\text{Rec } Z = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

• Función de probabilidad:

La función de probabilidad se obtiene luego de calcular la probabilidad asociada a cada uno de los elementos del recorrido de Z. Para ello consideramos la regla de Laplace:

$$P(Z = z_i) = \frac{\text{Casos favorables para } Z = z_i}{\text{Cardinalidad de } \Omega}$$

Ya conocemos la cardinalidad de Ω, de modo que solo falta obtener el número de casos favorables a cada uno de los valores que puede tomar Z:

Z = 0:

Corresponde al número de conjuntos de 5 elementos que se pueden formar con las 5 consonantes de MURCIÉLAGO. De inmediato sabemos que se puede formar un solo conjunto (recuerde que no estamos interesados en el orden en que se seleccionan las letras). Luego:

$$P(Z = 0) = \frac{1}{252}$$

Z = 1:

Corresponde al número de conjuntos de 5 elementos que se pueden formar con 4 consonantes y 1 vocal. Por otra parte, el número de conjuntos que se puede formar con 4 consonantes de un total de 5 se obtiene mediante una combinación de 4 elementos sobre un total de 5, esto es:

$$C_4^5 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} = 5$$

Es decir, se pueden formar 5 conjuntos de 4 consonantes, todos diferentes entre sí. Puesto que cada uno de estos conjuntos se puede asociar con una de las 5 vocales, el número de conjuntos de 5 elementos que se pueden formar con 4 consonantes y 1 vocal es:

$$5 \cdot C_4^5 = 5 \cdot 5 = 25$$

Con lo anterior, la probabilidad buscada es:

$$P(Z = 1) = \frac{25}{252}$$

Z = 2:

Corresponde al número de conjuntos de 5 elementos que se pueden formar con 3 consonantes y 2 vocales. Razonando de manera análoga al caso anterior, el número de conjuntos que se pueden formar con 3 consonantes de un total de 5 es:

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$$

Por otra parte, el número de conjuntos que se pueden formar con 2 vocales de un total de 5 es:

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10$$

Finalmente, puesto que por cada uno de los 10 conjuntos con 3 consonantes hay 10 conjuntos con 2 vocales, el número de conjuntos de 5 elementos que se pueden formar con 3 consonantes y 2 vocales es:

$$C_3^5 \cdot C_2^5 = 10 \cdot 10 = 100$$

Con lo anterior, la probabilidad buscada es:

$$P(Z = 2) = \frac{100}{252}$$

Z = 3:

Corresponde al número de conjuntos de 5 elementos que se pueden formar con 2 consonantes y 3 vocales. Este caso es completamente igual al anterior, con la diferencia que el número de consonantes y vocales están invertidos. Luego, por la simetría del problema (igual cantidad de vocales y consonantes), los resultados serán los mismos al del caso anterior, compruébelo. Luego:

$$P(Z = 3) = \frac{100}{252}$$

Z = 4:

Corresponde al número de conjuntos de 5 elementos que se pueden formar con 1 consonante y 4 vocales. Este caso es completamente igual al caso cuando Z = 1, con la diferencia que el número de consonantes y vocales están invertidos. Luego, por la simetría del problema (igual cantidad de vocales y consonantes), los resultados serán los mismos que los del caso para cuando Z = 1, compruébelo. Así:

$$P(Z = 4) = \frac{25}{252}$$

Z = 5:

Corresponde al número de conjuntos de 5 elementos que se pueden formar con las 5 vocales de MURCIÉLAGO. De inmediato sabemos que se puede formar un solo conjunto. Luego:

$$P(Z = 5) = \frac{1}{252}$$

Finalmente, la función de probabilidad de Z es:

$$f(z_i) = P(Z = z_i) \begin{cases} \frac{1}{252} & \text{si } Z = 0 \\ \frac{25}{252} & \text{si } Z = 1 \\ \frac{100}{252} & \text{si } Z = 2 \\ \frac{100}{252} & \text{si } Z = 3 \\ \frac{25}{252} & \text{si } Z = 4 \\ \frac{1}{252} & \text{si } Z = 5 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

Como paso adicional comprobamos que la suma de las probabilidades asociadas a los elementos del recorrido de Z sea la unidad:

$$P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) + P(Z = 5)$$

$$= \frac{1}{252} + \frac{25}{252} + \frac{100}{252} + \frac{100}{252} + \frac{25}{252} + \frac{1}{252}$$

$$= \frac{252}{252}$$

$$= 1$$

Luego, la función de probabilidad de Z está bien definida. Advierta además que no se simplificaron las probabilidades con el objetivo de hacer más simple esta comprobación.

• Función de distribución de probabilidad de Z:

Se obtiene mediante los valores acumulados de la función de probabilidad. Dada su simplicidad, su desarrollo se deja propuesto.

$$F(z_i) = P(Z \leq z_i) \begin{cases} \frac{1}{252} & \text{si } Z \leq 0 \\ \frac{26}{252} & \text{si } Z \leq 1 \\ \frac{126}{252} & \text{si } Z \leq 2 \\ \frac{226}{252} & \text{si } Z \leq 3 \\ \frac{251}{252} & \text{si } Z \leq 4 \\ 1 & \text{si } Z \leq 5 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

✍ *Ejercicios*

1. Se lanzan 3 monedas al aire y se define la variable aleatoria Y como el "número de caras" que se obtienen. Si una de las monedas tiene dos caras (está trucada), ¿cuál es el dominio y recorrido de Y?

   Respuesta:
   Dom Y $= \Omega = \{$(c,c,c), (c,c,s), (c,s,c), (c,s,s), (c,c,c), (c,c,s), (c,s,c), (c,s,s)$\}$, donde c denota cara y s sello.
   Rec Y $= \{1, 2, 3\}$

2. En una bolsa se han colocado 5 bolitas numeradas del 1 al 5. Se extraen dos bolitas con reposición, es decir, se extrae una bolita, se anota su numeración y luego se devuelve a la bolsa para extraer la siguiente. Se define la variable aleatoria X como el "valor absoluto de la diferencia de sus numeraciones". ¿Cuál es la función de probabilidad de la variable aleatoria X?

Respuesta:

$$f(x_i) = P(X = x_i) \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } X = 0 \\ \frac{8}{25} & \text{si } X = 1 \\ \frac{6}{25} & \text{si } X = 2 \\ \frac{4}{25} & \text{si } X = 3 \\ \frac{2}{25} & \text{si } X = 4 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

3. Considere el problema anterior. Se define la variable aleatoria Y como la "paridad de X". Si asigna el valor 1 cuando Y es impar y 2 cuando es par, ¿cuál es la función de probabilidad de Y?

   Respuesta:

$$f(y_i) = P(Y = y_i) \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{si } Y = 1 \\ \frac{3}{5} & \text{si } Y = 2 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

4. La figura 6 muestra la gráfica de la función de distribución de probabilidad de una v.a. Z. Al respecto, ¿cuál es el valor de $P(Z = 6)$?

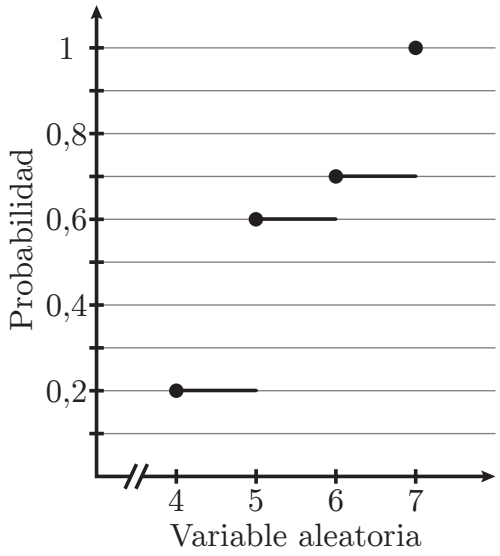


Figura 6. Función de distribución de probabilidad de la v.a. Z

Respuesta: 0,1

5. Se define la variable aleatoria X como la "puntuación obtenida al lanzar un dado de seis caras cargado", cuya función de probabilidad es:

$$f(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x_i}) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si X } = 1,\ 2,\ 3 \\ \frac{2}{10} & \text{si X } = 4,\ 5 \\ \frac{3}{10} & \text{si X } = 6 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Determine la función de distribución de probabilidad de X.

Respuesta:

$$\mathrm{F}(x) = (\mathrm{X} \leq \mathrm{x_i}) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si X } \leq 1 \\ \frac{2}{10} & \text{si X } \leq 2 \\ \frac{3}{10} & \text{si X } \leq 3 \\ \frac{5}{10} & \text{si X } \leq 4 \\ \frac{7}{10} & \text{si X } \leq 5 \\ 1 & \text{si X } \leq 6 \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

Desafíos resueltos

✓ Desafío:
Por propiedad, la suma de las probabilidades asociadas a cada uno de los elementos del recorrido de X debe ser la unidad. Luego:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)} &= 1 \\
\frac{1}{9}+a+\frac{1}{3}+b+\frac{2}{9} &= 1 \\
\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+a+b &= 1 \\
\frac{6}{9}+a+b &= 1 \\
a+b &= 1-\frac{6}{9} \\
a+b &= \frac{3}{9} \\
a &= \frac{3}{9}-b \qquad (1)
\end{aligned}$$

Por otro lado y de acuerdo al enunciado, sabemos que:

$$a-b = \frac{1}{9} \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{9}-b\right)-b &= \frac{1}{9} \\
\frac{3}{9}-2b &= \frac{1}{9} \\
-2b &= \frac{1}{9}-\frac{3}{9} \\
-2b &= -\frac{2}{9} \\
-b &= -\frac{1}{9} \\
b &= \frac{1}{9} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando (3) en (1), se tiene:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{9} - \frac{1}{9} \\ a &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Con lo anterior, $a = \frac{2}{9}$ y $b = \frac{1}{9}$.

Volver

Bibliografía

[1] Matemática 2° educación media, *Edición Bicentenario*, Editorial Santillana (2011).

[2] Matemática 2° medio, texto del estudiante, Ediciones SM (2013).
Gerardo Muñoz Díaz, pedro Rupin Gutiérrez, Loma Jiménez Martínez.