open green road

Guía Matemática

FUNCIÓN CUADRÁTICA Y RAÍZ CUADRADA

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Contexto

Detrás del movimiento que describe un proyectil, la distancia que recorre un objeto que acelera o en la caída libre de una manzana, está presente la función cuadrática. El concepto de función es transversal a todas la ciencias tanto naturales como sociales, por tal motivo es importante poder interpretar sus gráficas y desde ahi extraer conclusiones.

2. Función cuadrática

Se denomina función cuadrática a aquella definida como:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = ax^2 + bx + c \end{array}$$

donde a, b, c son constantes reales con $a \neq 0$. Existe una relación directa entre la función cuadrática y una ecuación de segundo grado del tipo $y = ax^2 + bx + c$ que iremos desarrollando en esta guía.

2.1. Características

La ecuación cuadrática no es inyectiva ya que una imagen tiene asociadas dos preimágenes. Veamos un caso puntual para $f(x) = x^2$:

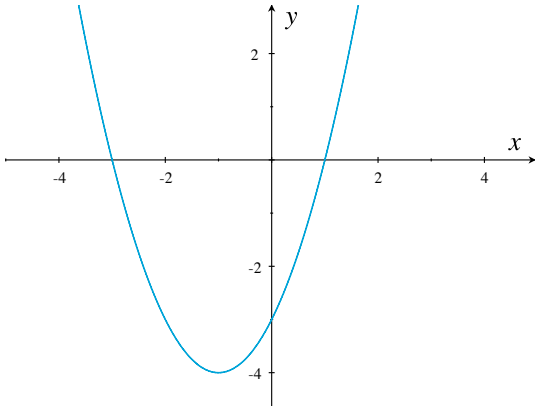
$$f(3) = 3^2 = 9$$
$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

En general para cualquier x se cumplirá que $x^2 = (-x)^2$, por lo tanto, hay dos preimágenes asosciadas a una misma imagen.

La función cuadrática tampoco es epiyectiva porque el recorrido no es igual al codominio. En estas condiciones la función inversa sólo existirá si "arreglamos" el dominio y el codominio de la función. Para ver estas características con más claridad es recomendable graficar la función.

2.2. Gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$

La gráfica de la función cuadrática se denomina **parábola** la cual es una curva simétrica respecto a una recta paralela al eje de las ordenadas. La parábola se compone de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. Por ejemplo, si tomamos la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y la graficamos se obtiene:

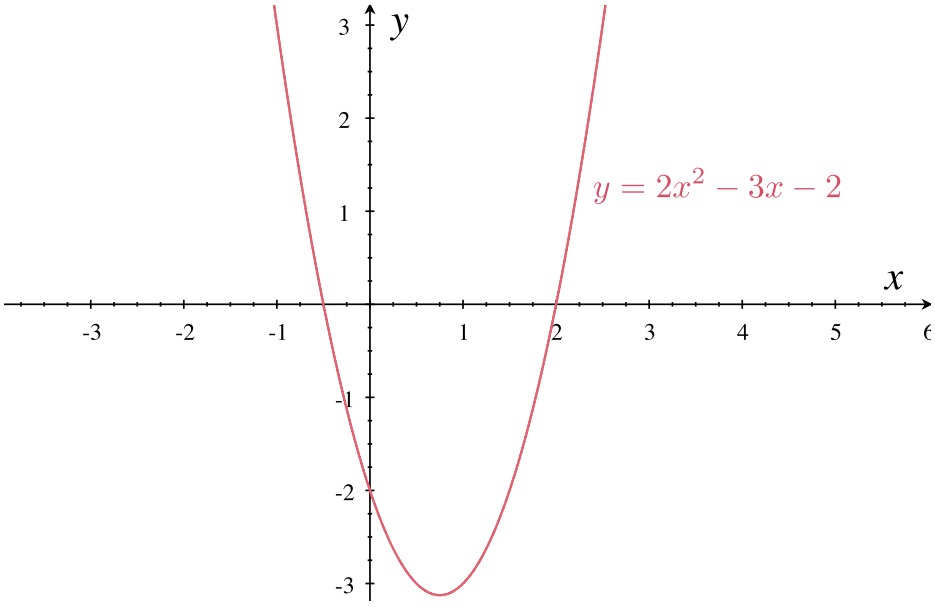


Las características particulares de cada parábola están determinadas por sus coeficientes a, b y c las cuales estudiaremos a continuación.

2.2.1. Coeficiente a

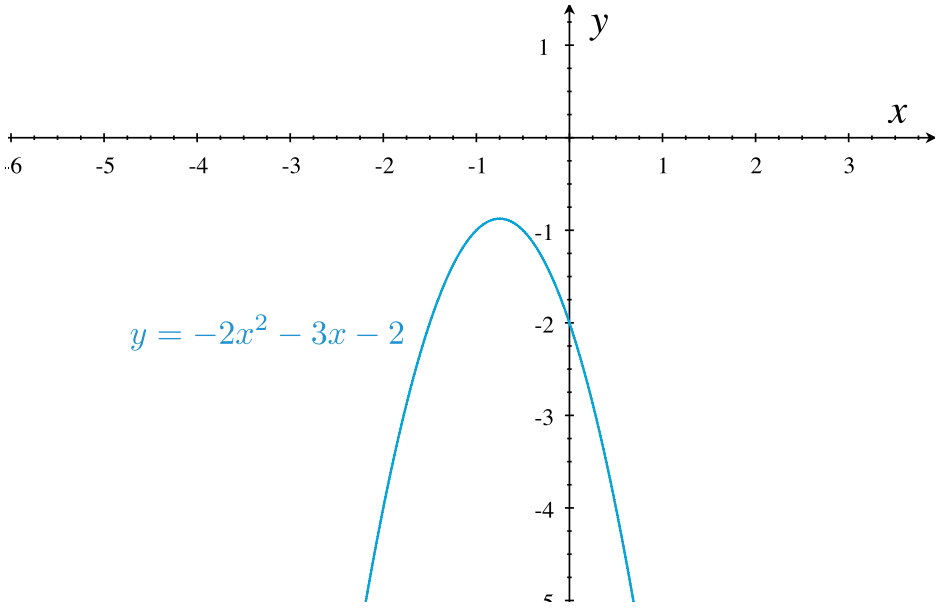
El coeficiente que acompaña a x^2 determina el sentido de las "ramas" de la parábola.

- Si $a > 0$ entonces las "ramas" de la parábola van hacia arriba.



Una manera de recordarlo es pensando que si $a > 0$ la parábola está "contenta c:".

- Si $a < 0$ entonces las "ramas" de la parábola van hacia abajo.



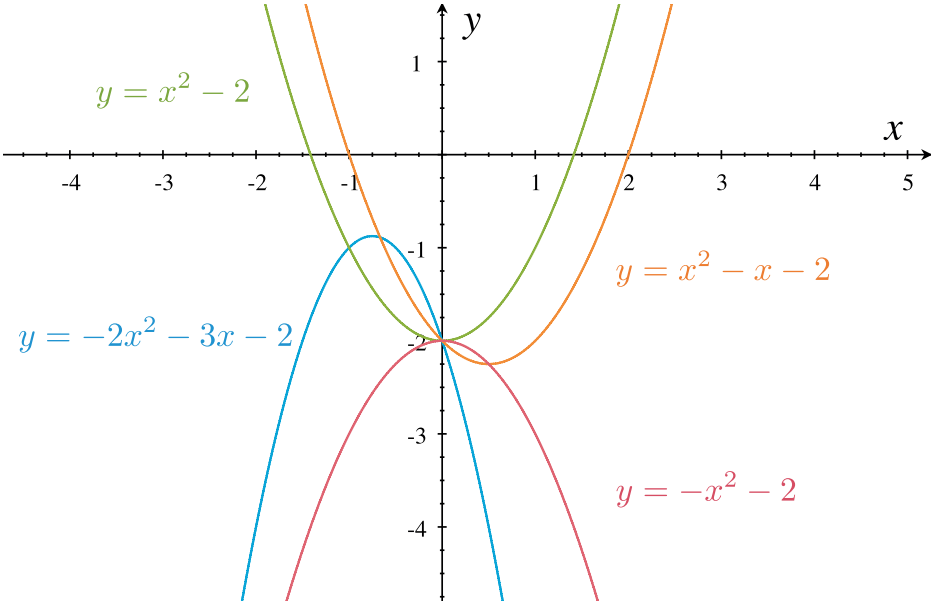
Una manera de recordarlo es pensando que si $a < 0$ entonces la parábola está "triste :c".

2.2.2. Coeficiente c

Si evaluamos $x = 0$ en una función cuadrática cualquiera $f(x) = ax^2 + bx + c$ obtenemos:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

El punto $(0, c)$ pertenece a la parábola y corresponde al intercepto con el eje y de una función cuadrática del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. A continuación se presenta la gráfica de distintas parábolas con $c = 2$.



2.2.3. Intersección con el eje x

Si quisiéramos saber en qué puntos la parábola intersecta al eje x, debemos buscar el o los puntos para los cuales se cumple que $y = 0$. Aplicando tal condición a la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ lo que debemos resolver es:

$$0 = ax^2 + bx + c$$

Hemos llegado a una ecuación de segundo grado con una incógnita, la cual podemos resolver con la solución general[1].

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con esta expresión encontramos las raíces de la ecuación cuadrática y con ello los puntos donde la función cuadrática cruza el eje x:

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$$

Recordemos que una ecuación cuadrática puede tener a lo más 2 soluciones, esto quiere decir que hay casos para los que sólo habrá una solución y otros en donde no habrá solución real. Todo depende de un término llamado **discriminante** Δ que se define como:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

[1] Cualquier camino para encontrar las raíces o soluciones de la ecuación de segundo grado es válido

Los puntos de intersección con el eje de las abscisas los podemos reecribir en función de Δ así:

$$\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},0\right) \text{ y } \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},0\right)$$

2.2.4. Número de intersecciones con el eje x

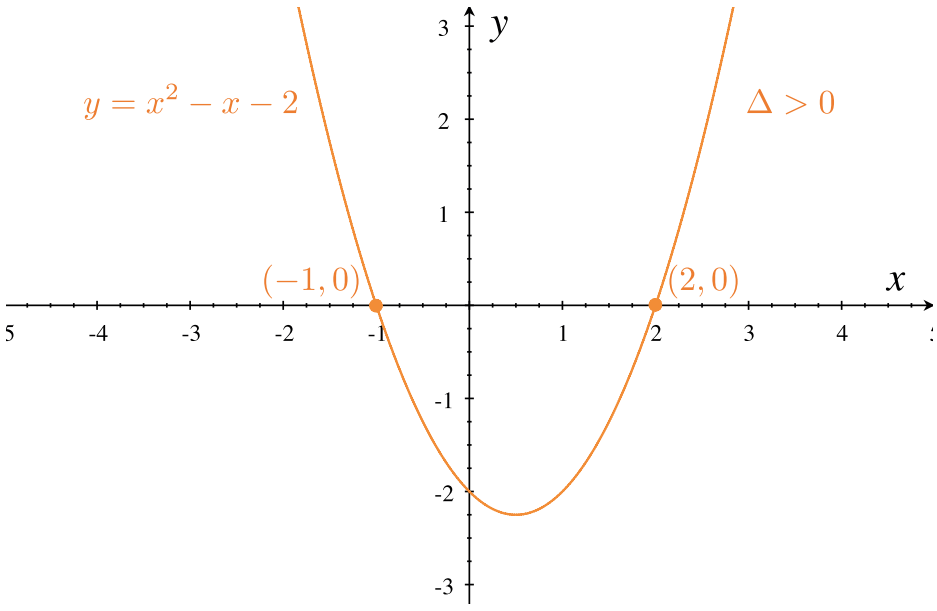
Según el valor del Δ la función cuadrática cortara dos, una o ninguna vez al eje x.

- Si $\Delta > 0$ la parábola corta al eje x en 2 puntos. Esto se debe a que $\sqrt{\Delta}$ si existirá y habrán dos soluciones en la ecuación de segundo grado. Por ejemplo, para la función $f(x) = x^2 - x - 2$ los coeficientes son $a = 1$, $b = -1$ y $c = -2$. En base a ésto calculamos el discriminante Δ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-2) \\ &= 1 + 8 = 9\end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$ la ecuación $0 = x^2 - x - 2$ tiene dos soluciones reales y, por lo tanto, la función corta al eje x dos veces. Los puntos de intersección son:

$$\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},0\right) \text{ y } \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},0\right)$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{9}}{2},0\right) \text{ y } \left(\frac{1-\sqrt{9}}{2},0\right)$$
$$\left(\frac{1+3}{2},0\right) \text{ y } \left(\frac{1-3}{2},0\right)$$
$$\left(\frac{4}{2},0\right) \text{ y } \left(\frac{-2}{2},0\right)$$
$$(2,0) \text{ y } (-1,0)$$



- Si $\Delta = 0$ la parábola corta al eje x en 1 punto. Esto se debe a que la solución general para la ecuación de segundo grado tiene una única solución:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \\ &= \frac{-b}{2a} \end{aligned}$$

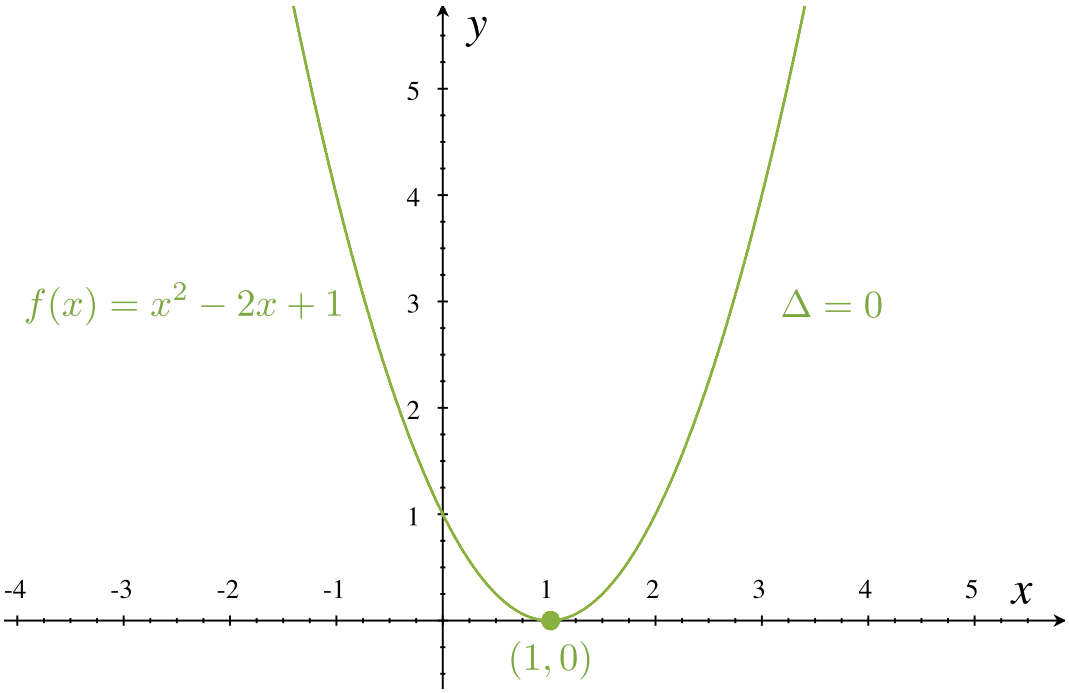
Por lo tanto, en este caso el punto de intersección con el eje x es $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$.

Por ejemplo, en la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ los coeficientes son $a = 1$, $b = -2$ y $c = 1$. Conociendo ésto calculamos el discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) \\ &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Como $\Delta = 0$ la ecuación $0 = x^2 - 2x + 1$ tiene sólo una solución y, por lo tanto, la función corta al eje x una vez. El punto de interseccion es

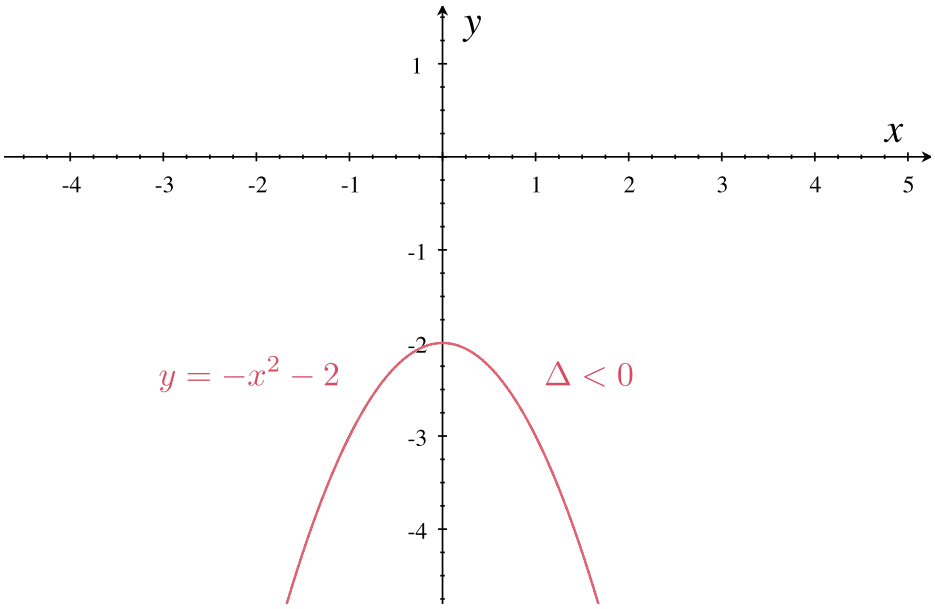
$$\begin{aligned} \left(\frac{-b}{2a}, 0\right) &= \left(\frac{2}{2 \cdot 1}, 0\right) \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$



- Si $\Delta < 0$ la parábola no corta al eje x. Esto se debe a que $\sqrt{\Delta}$ no existe y, por lo tanto, la ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales. Por ejemplo, para la función $f(x) = -x - 2$ los coeficientes son $a = -1$, $b = 0$ y $c = -2$. En base a esto calculamos el discriminante Δ.

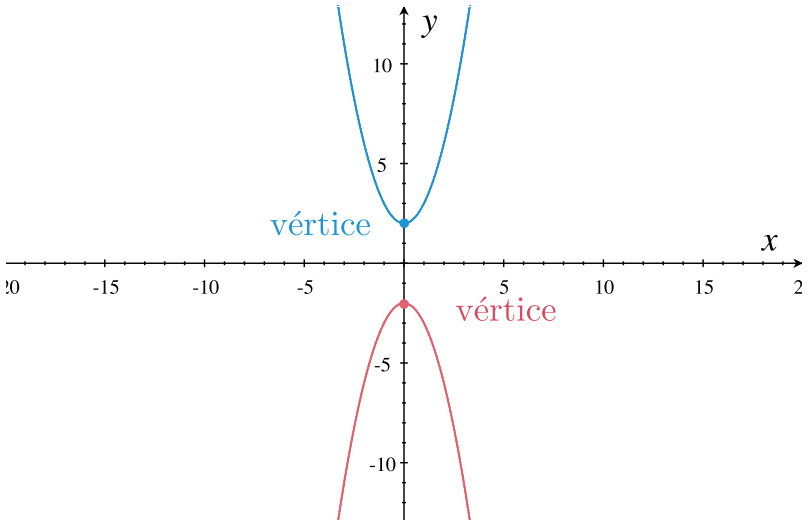
$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) \\ &= -8\end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$ la ecuación $0 = -x^2 - 2$ no tiene solución en los reales y por lo tanto la función no corta al eje x.



2.2.5. Vértice de la parábola

Existen dos puntos de gran interés en el estudio de las funciones: el mínimo y el máximo. Para una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ existe un mínimo de la función cuando $a > 0$ y existe un máximo cuando $a < 0$. Dicho punto recibe el nombre de vértice.



Cabe destacar que el eje de simetría de la parábola pasa por el vértice v, el cual tiene coordenadas:

$$\text{vértice} = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

3. Función raíz cuadrada

La función raíz cuadrada es aquella que asocia un término real positivo x con su raíz cuadrada $\sqrt{x}$, la cual podemos escribir como:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Esta función va de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, por lo que la solución negativa de las raíces no se considera, de lo contrario $f(x) = \sqrt{x}$ no sería función porque cada preimagen tendría dos imágenes.

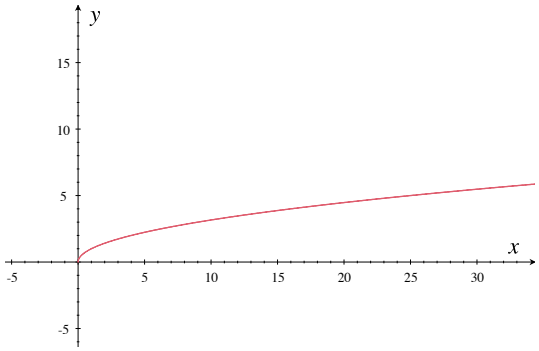
3.1. Características

La función raiz cuadrada es creciente, esto quiere decir que para cualquier $x_1 > x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$. Además $f(x) = \sqrt{x}$ es biyectiva en los intervalos que la hemos definido y por lo tanto tiene función inversa.

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

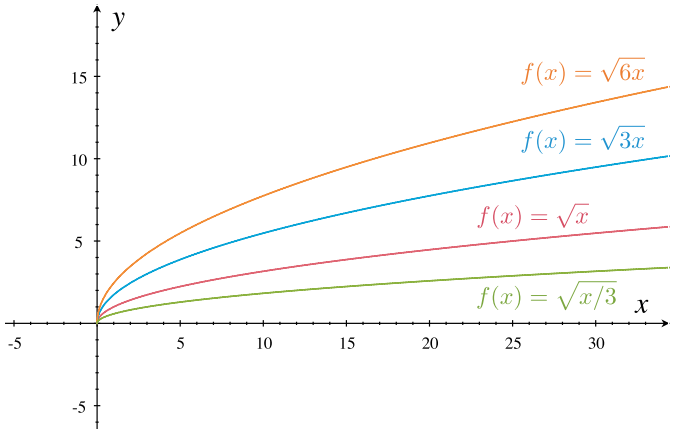
3.2. Gráfica de la función de $f(x) = \sqrt{x}$

El gráfico de la función cuadrática se asemeja a la mitad de una parábola pero simétrica al eje x como la mostramos a continuación:



3.2.1. Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{ax}$

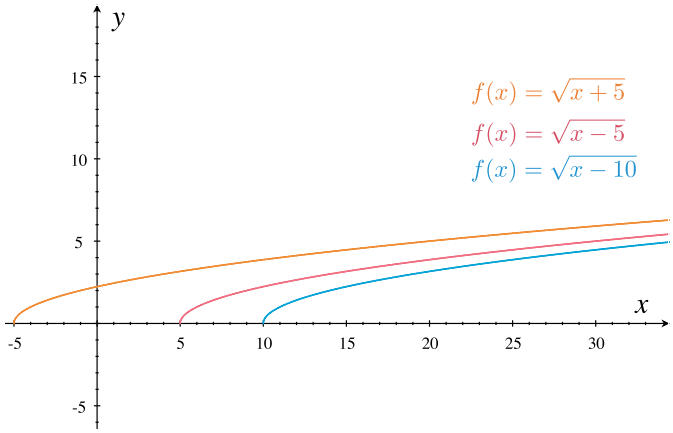
Estudiemos cómo afecta la amplificación del argumento de la raíz por algún $a > 0$.



Podemos notar que una función donde el coeficiente de x es mayor que en otra, la gráfica de la función con coeficiente mayor siempre está por sobre la gráfica con coeficiente menor.

3.2.2. Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+a}$

Estudiemos cómo afecta el sumar un término a al argumento de la función.



Para $f(x) = \sqrt{x+a}$ podemos notar dos cosas:

- La gráfica de la función parte en el eje x en el punto $-a$
- La gráfica de la función que tiene mayor a está sobre las otras.

✍ *Ejercicios* 1

Para cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - x + 1$
2. $g(x) = -x^2 + 4x + 3$
3. $h(x) = 5x^2 + 15x + 20$
4. $f(x) = 6 + 5x + x^2$
5. $g(x) = x^2 + 8x + 16$

Hallar sin graficar:

1. Puntos de intersección con el eje x
2. Punto de intersección con eje y
3. Sentido de las "ramas" de la función.
4. Vértice.
5. Punto máximo o mínimo.

Bibliografía

[1] Apuntes de Álgebra I, Tomo I, *Segunda edición 1993*, Facultad de Ciencias, USACH
Antonio Orellana Lobos.

[2] Apuntes Álgebra, *Edición 2003*, Facultad de Ciencias, USACH
Ricardo Santander Baeza.