open green road



Guía Matemática

RAÍCES

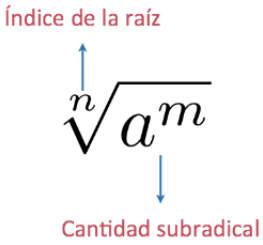
profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Raíces y potencias

La radicación podemos entenderla como la operación inversa a la potenciación, así como multiplicar y dividir, sumar y restar. La raíz enésima de a elevada a m es $\sqrt[n]{a^m}$, de la cual podemos distinguir dos elementos importantes:

☞¡Mira!



Para el trabajo algebraico y aritmético con raíces es importante que no olvidemos que existe una relación entre raíces y potencias:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

De esta relación podemos encontrar una serie de propiedades para las raíces.

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

   Esto se debe a que

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \\ &= (ab)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{ab}\end{aligned}$$

2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

   Esto se debe a que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\end{aligned}$$

3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

   Esto se debe a que

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} \\ &= a^{\frac{1}{n \cdot m}} \\ &= \sqrt[n \cdot m]{a}\end{aligned}$$

4. $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$

   Esto se debe a que

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^n b} &= (a^n b)^{\frac{1}{n}} \\ &= (a^n)^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} \\ &= a^{\frac{n}{n}}\sqrt[n]{b} \\ &= a\sqrt[n]{b}\end{aligned}$$

Esta propiedad es muy útil, ya que nos permite extraer de la raíz todas las cantidades subradicales que tengan un exponente divisible por el índice de la raíz. De manera general:

$$\sqrt[n]{a^m b} = a^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{b}$$

✎ *Ejemplo*

Aplica las propiedades de las raíces para escribir los radicales de la forma más simple posible.

1. $\sqrt{4 \cdot 16}$

   Solución: Escribimos las cantidades subradicales como potencias y luego aplicamos la propiedad 4.

$$\begin{aligned}\sqrt{4 \cdot 16} &= \sqrt{2^2 \cdot 4^2} \\ &= 2 \cdot 4 \\ &= 8\end{aligned}$$

2. $\sqrt{18}$

   Solución: Escribimos la cantidad subradical como factorización prima y luego extraemos de la raíz las cantidades subradicales que tengan un exponente divisible por el índice.

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2 \cdot 9} \\ &= \sqrt{2 \cdot 3^2} \\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

3. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$

   Solución: Escribimos el numerador y denominador como potencia y luego extraemos de la raíz las cantidades subradicales que tengan un exponente divisible por el índice.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{27}{125}} &= \sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}} \\ &= \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^3} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

4. $\sqrt{1 \div 36}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 \div 36} &= \sqrt{\frac{1}{36}} \\ &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{36}} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

5. $\sqrt{\frac{49}{81}}$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{49}{81}} &= \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

6. $\sqrt{3^6}$

Solución: Aplicando la relación entre potencias y raíces:

$$\begin{aligned}\sqrt{3^6} &= 3^{\frac{6}{2}} \\ &= 3^3 \\ &= 27\end{aligned}$$

7. $\sqrt[3]{2^{15}}$

Solución: Aplicando la relación entre potencias y raíces:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2^{15}} &= 2^{\frac{15}{3}} \\ &= 2^5 \\ &= 32\end{aligned}$$

8. $\sqrt{\sqrt{81}}$

Solución: Aplicamos la propiedad 3:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{81}} &= \sqrt[2\cdot 2]{81} \\ &= \sqrt[4]{81} \\ &= \sqrt[4]{9^2} \\ &= \sqrt[4]{(3^2)^2} \\ &= \sqrt[4]{3^4} \\ &= 3\end{aligned}$$

9. $\sqrt{50}$

Solución: Para simplificar el radical debemos escribir la cantidad subradical como factorización prima.

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{2\cdot 25} \\ &= \sqrt{2\cdot 5^2} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

10. $2\sqrt{108}$

Solución: Para simplificar el radical debemos escribir la cantidad subradical como factorización prima.

$$\begin{aligned}2\sqrt{108} &= 2\sqrt{2\cdot 54} \\ &= 2\sqrt{2\cdot 6\cdot 9} \\ &= 2\sqrt{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3^2} \\ &= 2\sqrt{2^2\cdot 3^3} \\ &= 2\cdot 2\sqrt{3^3} \\ &= 4\sqrt{3^3}\end{aligned}$$

La potencia 3^3 la podemos escribir como $3^2\cdot 3$, de este modo podemos extraer 3^2 de la raíz cuadrada.

$$\begin{aligned}4\sqrt{3^3} &= 4\sqrt{3^2\cdot 3} \\ &= 4\cdot 3\sqrt{3} \\ &= 12\sqrt{3}\end{aligned}$$

✍ *Ejercicios* 1

Aplica las propiedades de las raíces para escribir los radicales de la forma más simple posible.

1. $\sqrt{72}$
2. $\sqrt{162}$
3. $\frac{1}{5}\sqrt{250}$
4. $\frac{3}{8}\sqrt{80}$
5. $\sqrt[3]{48}$
6. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{192}$
7. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$
8. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{7^{13}}}$
9. $\sqrt[6]{729}$
10. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{375}$
11. $3\sqrt[3]{5.000}$
12. $2\sqrt[4]{10.000}$

2. Raíces semejantes

Decimos que dos o más radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical, por ejemplo $\sqrt{2}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $m\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$ son radicales semejantes porque tienen en común el radical $\sqrt{2}$.

☞¡Mira!

2.1. Reducción de radicales semejantes

Las raíces semejantes se reducen de la misma manera que lo hacemos para términos algebraicos semejantes, hallando la suma o resta de los coeficientes de las raíces semejantes y colocando esa suma o diferencia como coeficiente de la parte radical en común.

✎ ***Ejemplo***

1. *Simplificar:*

   a) $7\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = (7-15)\sqrt{2} = -8\sqrt{2}$

   b) $4\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 19\sqrt{3} = (4-20+19)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

   c) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\sqrt[3]{2} = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}$

2. *Efectuar la siguiente operación.*

   a) $\sqrt{12} + \sqrt{27}$

   Solución: A primera vista no hay términos comunes, pero podemos reescribir las cantidades subradicales como factorización prima y luego extraemos términos.

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{27} &= \sqrt{3 \cdot 2^2} + \sqrt{3 \cdot 3^2} \\ &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= (2+3)\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

   b) $3\sqrt{20} - \sqrt{45}$

   Solución: Aplicamos los mismos pasos que en el caso anterior.

$$\begin{aligned}3\sqrt{20} - \sqrt{45} &= 3\sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 5} \\ &= 3 \cdot 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

Un ***error*** *común es pensar que:*

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Prueba la falsedad de esta afirmación con $a = 36$ *y* $b = 64$

✍ *Ejercicios* 2

Reduce los radicales semejantes.

1. $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}$
2. $\frac{1}{2}\sqrt{3}-5\sqrt{3}$
3. $8\sqrt[3]{7}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{7}$
4. $(x-1)\sqrt{3}+(x+3)\sqrt{3}-x\sqrt{3}$
5. $\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}$
6. $\sqrt{80}-\sqrt{63}-\sqrt{180}$
7. $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{16}$
8. $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{1.715}-\sqrt[3]{1.536}$
9. $\sqrt{80}-2\sqrt{252}+3\sqrt{405}-3\sqrt{500}$
10. $\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{48}+\frac{1}{6}\sqrt{72}$

3. Radicales algebraicos

Como es de esperar, todas las propiedades que hemos estudiado para cantidades aritméticas aplican para expresiones algebraicas. A continuación presentamos una serie de ejemplos para mostrar la aplicación de las propiedades de los radicales en álgebra.

✎ *Ejemplo*

1. *Simplificar:*

   a) $\sqrt{49x^3y^7}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{49x^3y^7} &= \sqrt{49}\sqrt{x^3}\sqrt{y^7}\\ &= \sqrt{7^2}\sqrt{x^2x}\sqrt{y^6y}\\ &= 7xy^3\sqrt{x}\sqrt{y}\\ &= 7xy^3\sqrt{xy}\end{aligned}$$

   b) $\sqrt{50a^2b}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{50a^2b} &= \sqrt{2\cdot 25a^2b}\\ &= \sqrt{2\cdot 5^2a^2b}\\ &= 5a\sqrt{2b}\end{aligned}$$

   c) $2\sqrt[3]{16x^2y^7}$

   Solución: Descomponemos las potencias de tal manera que sus exponentes sean múltiplos del índice de la raíz, en este caso múltiplos de 3.

$$\begin{aligned}2\sqrt[3]{16x^2y^7} &= 2\sqrt[3]{2^4x^2y^7}\\ &= 2\sqrt[3]{2\cdot 2^3x^2y^6y}\\ &= 4y^2\sqrt[3]{2x^2y}\end{aligned}$$

d) $\sqrt[4]{25a^2b^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{25a^2b^2} &= \sqrt[4]{5^2a^2b^2}\\ &= \sqrt[4]{(5ab)^2}\\ &= (5ab)^{\frac{2}{4}}\\ &= (5ab)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{5ab}\end{aligned}$$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{81x^7}}$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{8}{81x^7}} &= \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^4x^7}}\\ &= \sqrt[3]{\frac{2^3}{3\cdot 3^3x\cdot x^6}}\\ &= \frac{2}{3x^2}\sqrt[3]{\frac{1}{3x}}\end{aligned}$$

f) $5\sqrt{\dfrac{9n}{5m^3}}$

Solución:

$$\begin{aligned}5\sqrt{\frac{9n}{5m^3}} &= 5\sqrt{\frac{3^2n}{5m\cdot m^2}}\\ &= 5\frac{3}{m}\sqrt{\frac{n}{5m}}\\ &= \frac{15}{m}\sqrt{\frac{n}{5m}}\end{aligned}$$

2. *Reduce términos semejantes*

a) $\sqrt{25ax^5}+\sqrt{49a^3x^3}-\sqrt{9ax^7}$

Solución: Extraemos las cantidades subraricales que tengan exponente divisible por el índice de la raíz.

$$\begin{aligned}\sqrt{25ax^5}+\sqrt{49a^3x^3}-\sqrt{9ax^7} &= \sqrt{5^2\cdot a\cdot x^4\cdot x}+\sqrt{7^2\cdot a^2\cdot a\cdot x^2\cdot x}-\sqrt{3^2\cdot a\cdot x^6\cdot x}\\ &= 5x^2\sqrt{ax}+7ax\sqrt{ax}-3x^3\sqrt{ax}\\ &= (5x^2+7ax-3x^3)\sqrt{ax}\end{aligned}$$

Recuerda que al extraer una cantidad subradical, ésta queda como coeficiente de la raíz elevada a la razón entre el exponente que tenía dentro de la raíz y el índice de la raíz.

$$\sqrt[n]{a^mb} = a^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{b}$$

Ejercicios 3

Simplificar.

1. $\sqrt{4a^3}$
2. $4\sqrt[3]{250a^3b^8}$
3. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{32mn^8}$
4. $\frac{1}{2}\sqrt{108a^5b^7}$
5. $2a\sqrt{44a^3b^7c^9}$
6. $\sqrt[6]{343a^9x^18}$
7. $\sqrt[6]{49a^2b^4}$
8. $\sqrt{\frac{27x^2}{16a^2b^4}}$
9. $2b^2\sqrt[3]{\frac{125}{4b^5}}$

3.1. Operaciones con raíces de diferente índice

Para sumar o restar fracciones necesitamos que éstas tengan el mismo denominador. Si no lo tienen buscamos el **mínimo común múltiplo** entre los denominadores y luego escribimos fracciones **equivalentes** a las anteriores, pero con el denominador encontrado. Notemos que en los radicales ocurre algo similar. Para sumar, restar, multiplicar y dividir raíces necesitamos que éstas tengan el mismo índice, entonces ¿qué podemos hacer cuando dos raíces tienen índices diferentes? Veamos el siguiente ejemplo para entender.

Ejemplo

1. *Multiplicar* $\sqrt{x}$ *por* $\sqrt[3]{2x^2}$

   Solución: Primero escribimos las raíces como potencias de exponente fraccionario.

   $$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{2x^2} = x^{\frac{1}{2}}\cdot(2x^2)^{\frac{1}{3}}$$

   Para que podamos usar la propiedad de la multiplicación de las raíces con igual índice, debemos reescribirlas como radicales equivalentes que tengan igual índice. Al expresarlas como potencias de exponente fraccionario los índices corresponden a los denominadores. Entonces debemos reescribir los exponentes como fracciones con el mismo denominador usando el mínimo común múltiplo. El $MCM(2,3) = 6$, entonces:

   $$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

   y

   $$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

   Ahora usamos las fracciones con denominador 6 para reescribir las raíces.

   $$\begin{aligned} x^{\frac{1}{2}}\cdot(2x^2)^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{3}{6}}\cdot(2x^2)^{\frac{2}{6}} \\ &= \sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{(2x^2)^2} \\ &= \sqrt[6]{x^3\cdot(2x^2)^2} \\ &= \sqrt[6]{x^3\cdot 4x^4} \\ &= \sqrt[6]{4x^7} \\ &= x\sqrt[6]{4x} \end{aligned}$$

2. *Simplificar* $\sqrt[3]{3x^2} \div \sqrt{9x}$

   Solución: Hacemos los mismos pasos que en el caso anterior.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{3x^2} \div \sqrt{9x} &= (3x^2)^{\frac{1}{3}} \div (9x)^{\frac{1}{2}} \\
&= (3x^2)^{\frac{2}{6}} \div (9x)^{\frac{3}{6}} \\
&= \frac{\sqrt[6]{(3x^2)^2}}{\sqrt[6]{(9x)^3}} \\
&= \sqrt[6]{\frac{(3x^2)^2}{(9x)^3}} \\
&= \sqrt[6]{\frac{3^2x^4}{9^3x^3}} \\
&= \sqrt[6]{\frac{3^2x^4}{3^6x^3}} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt[6]{3^2x} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt[6]{9x}
\end{aligned}$$

✍ ***Ejercicios*** *4*

Desarrolla las operaciones y reduce.

1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{64} \div \sqrt[3]{12}$
3. $\sqrt{2x} \cdot \sqrt[3]{3x^2}$
4. $\sqrt[3]{9x^2y} \cdot \sqrt[6]{81x^3}$
5. $\sqrt[3]{x^2y^2} \cdot \sqrt[4]{3x^3y}$
6. $\sqrt{2x} \cdot \sqrt[5]{5x} \cdot \sqrt[10]{\frac{1}{16x^2}}$
7. $\sqrt{6} \div \sqrt[3]{5}$
8. $2\sqrt[3]{3a} \div 10\sqrt{a}$
9. $\sqrt[3]{8a^3b} \div \sqrt[6]{16x^2}$

---

4. Comparación de raíces con el mismo índice

Para $x > y$ y n, todos reales positivos, se cumple que:

$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$$

☞¡Mira!

Este resultado nos permite definir si una raíz es mayor o menor que otra, sólo comparando si la cantidad subradical es menor o mayor. Por ejemplo ¿qué número es mayor $\sqrt[3]{10}$ ó $\sqrt{5}$? Para responder esta pregunta podemos escribir ambas raíces con el mismo índice como lo hemos hecho en los anteriores ejemplos. Los índices son 2 y 3, por lo tanto, el **menor múltiplo común** es 6.

$$\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{10^2} = \sqrt[6]{100}$$

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

Como las raíces tienen el mismo índice, el radical mayor es el que tiene la mayor cantidad subradical, en este caso

$$\sqrt[6]{125} > \sqrt[6]{100}$$

Entonces podemos concluir que

$$\sqrt{5} > \sqrt[3]{10}$$

✍ *Ejercicios* **5**

Escribir en orden decreciente de magnitud.

1. $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{3}$
2. $\sqrt[6]{15},\ \sqrt[4]{7}$
3. $\sqrt{13},\ \sqrt[3]{4}$
4. $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{12},\ \sqrt[4]{18}$
5. $\sqrt[4]{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{15}$
6. $\sqrt[3]{3},\ \sqrt[6]{12},\ \sqrt[9]{24}$

5. Racionalización

Consiste en reescribir una fracción cuyo denominador es un radical a otra fracción equivalente en donde su denominador sea un racional. Con esta acción hacemos "desaparecer" todo signo radical del denominador. En la racionalización podemos distinguir dos casos diferentes.

☞¡Mira!

5.1. Denominador monomio radical

En este caso debemos amplificar la fracción por el radical, del mismo índice del radical del denominador, tal que al multiplicarlo con el denominador dé como resultado un racional. Para comprenderlo veamos una serie de ejemplos.

✎ *Ejemplo*

Racionaliza:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{5x}}$

Solución: Para eliminar el radical del denominador amplificamos por $\sqrt{5x}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5x}} &= \frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5x}} \\ &= \frac{\sqrt{5x \cdot 1}}{\sqrt{5x}\sqrt{5x}} \\ &= \frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5^2x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{5x}}{5x}\end{aligned}$$

De manera general para cualquier $a > 0$ se cumple que:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x}}$

Solución: El denominador es $\sqrt[3]{9x}$ que es igual a $\sqrt[3]{3^2 x}$. Para extraer cantidades subradicales de esta raíz cúbica, los exponentes de los términos que componen a la cantidad subradical deben ser múltiplos de 3. Sabemos que la raíz por la que amplificaremos tiene índice 3. Además la cantidad subradical es 3^2x , para que los podamos extraer de la raíz cúbica debemos multiplicarlos por $3x^2$, de este modo debemos multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[3]{3x^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{9x}} &= \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3^2 x}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3x^2}\sqrt[3]{3^2 x}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3^3 x^3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{3x}\end{aligned}$$

Nos podemos dar cuenta que la cantidad subradical del factor que usaremos para amplificar, se compone de todas letras y números de la cantidad subradical de la raíz del denominador, cada una de éstas elevada a la potencia que le falta para llegar al índice.

Por ejemplo, si el denominador es $\sqrt[4]{2^3 x^2}$, el factor para amplificar será una raíz de índice 4 y la cantidad subradical estará compuesta por 2 y x, cada una de éstas elevadas al número que le falta a 2^3 y x^2 para llegar a un exponente igual al índice de la raíz (en este caso particular 4). A 2^3 le falta 1 unidad en el exponente y a x^2 le faltan 2 unidades en el exponente, entonces debemos multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[4]{2x^2}$.

3. $\dfrac{3}{\sqrt[4]{9a}}$ **Solución:** El denominador es $\sqrt[4]{9a} = \sqrt[4]{3^2 a}$, a 3 le faltan **dos** unidades en el exponente para igualar el valor del índice de la raíz, y a a le faltan **tres** unidades en el exponente. Entonces el factor es $\sqrt[4]{3^2 a^3}$.

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt[4]{9a}} &= \frac{\sqrt[4]{3^2 a^3}}{\sqrt[4]{3^2 a^3}} \cdot \frac{3}{\sqrt[4]{3^2 a}} \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt[4]{3^2 a^3}}{\sqrt[4]{3^2 a^3}\sqrt[4]{3^2 a}} \\ &= \frac{3\sqrt[4]{3^2 a^3}}{\sqrt[4]{3^4 a^4}} \\ &= \frac{3\sqrt[4]{9a^3}}{3a} \\ &= \frac{\sqrt[4]{9a^3}}{a}\end{aligned}$$

Ejercicios **6**

Racionaliza.

1. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$
2. $\dfrac{3}{\sqrt{5x}}$
3. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{12a}}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{20x^2}}$
5. $\dfrac{x}{\sqrt[4]{27x^3}}$
6. $\dfrac{5n^3}{3\sqrt{mn}}$
7. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{81a^3}}$
8. $\dfrac{2}{\sqrt[6]{x^3y^5}}$
9. $\dfrac{x}{\sqrt[12]{m^{11}n^{10}}}$

5.2. Expresiones conjugadas

Consideremos una expresión algebraica que contiene radicales de índice dos:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Tomemos la expresión compuesta por los mismos elementos, pero ahora con signo opuesto:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

Se dice que estas dos expresiones son **conjugadas**. Otros ejemplos de pares de conjugadas son:

$$a+\sqrt{b} \text{ y } a-\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a}-b \text{ y } \sqrt{a}+b$$

Entonces la conjugada de $\sqrt{2}-1$ es $\sqrt{2}+1$, la conjugada de $\frac{1}{2}-\sqrt{11}$ es $\frac{1}{2}+\sqrt{11}$, y la conjugada de $2+3\sqrt{5}$ es $2-3\sqrt{5}$. Pero ¿cuál es la importancia de los pares de expresiones conjugadas? Veamos lo que ocurre al multiplicar expresiones conjugadas:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) &= (\sqrt{2})^2-(1)^2\\ &= 2-1\\ &= 1\end{aligned}$$

En otro ejemplo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{11}\right)\left(\frac{1}{2}+\sqrt{11}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2-(\sqrt{11})^2\\ &= \frac{1}{4}-11\\ &= -\frac{43}{11}\end{aligned}$$

Notemos que si multiplicamos un binomio por su conjugado obtendremos una **suma por su diferencia**, lo que eliminará los radicales.

El producto de una expresión por su conjugada es racional. De hecho si $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ son reales, entonces:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

Las expresiones conjugadas son muy importantes para la racionalización donde el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo grado.

5.3. Denominador binomio con radicales de segundo grado

Para racionalizar el denominador de una fracción cuando éste se compone de un binomio que contiene radicales de segundo grado, debemos simplemente **amplificar la fracción por el conjugado del denominador**.

✎ ***Ejemplo***

1. *Racionaliza:*

   a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

   Solución: Amplificamos por el conjugado del denominador que es $\sqrt{5}+1$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5}-1} &= \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}\\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}\\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}\\ &= \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}\end{aligned}$$

   b) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} &= \frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\\ &= \frac{(3-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\\ &= \frac{3-3\sqrt{2}-\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{1^2-(\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{3-4\sqrt{2}+2}{-1}\\ &= -1(5-4\sqrt{2})\\ &= 4\sqrt{2}-5\end{aligned}$$

2. *Racionalizar la expresión* $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ *con tres radicales de índice dos en el denominador.*

Solución: Utilizando la propiedad de asociatividad, agrupamos el denominador en 2 términos:

$$\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{6}}$$

El conjugado de $(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{6}$ es $(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6}$. Amplificamos la fracción por el conjugado.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{6}} &= \frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{6}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6}}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6}} \\
&= \frac{4((\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2} \\
&= \frac{4((\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6})}{(\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5})+(\sqrt{5})^2-6} \\
&= \frac{4((\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6})}{2+2\sqrt{2\cdot 5}+5-6} \\
&= \frac{4((\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6})}{2\sqrt{10}+1} \\
&= \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}+4\sqrt{6}}{2\sqrt{10}+1}
\end{aligned}$$

Ahora amplificamos por el conjugado del denominador, que es $2\sqrt{10}-1$.

$$\begin{aligned}
\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}+4\sqrt{6}}{(2\sqrt{10}+1)} &= \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}+4\sqrt{6}}{(2\sqrt{10}+1)} \cdot \frac{2\sqrt{10}-1}{2\sqrt{10}-1} \\
&= \frac{(4\sqrt{2}+4\sqrt{5}+4\sqrt{6})(2\sqrt{10}-1)}{(2\sqrt{10})^2-1^2} \\
&= \frac{8\sqrt{20}+8\sqrt{50}+8\sqrt{60}-4\sqrt{2}-4\sqrt{5}-4\sqrt{6}}{40-1} \\
&= \frac{16\sqrt{5}+40\sqrt{2}+16\sqrt{15}-4\sqrt{2}-4\sqrt{5}-4\sqrt{6}}{39} \\
&= \frac{36\sqrt{2}+12\sqrt{5}+16\sqrt{15}-4\sqrt{6}}{39}
\end{aligned}$$

✍ *Ejercicios* 7

Racionaliza.

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
2. $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$
3. $\dfrac{3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}+6\sqrt{3}}$
4. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2\sqrt{10}-6}}$
5. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
6. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Bibliografía

[1] Álgebra, *Edición 1983*, CODICE S.A. Madrid (1983)
Dr. Aurelio Baldor.

[2] Aritmética, *Edición 1983*, CODICE S.A. Madrid (1983)
Dr. Aurelio Baldor.