open green road

Guía Matemática

CONJUNTOS NUMÉRICOS

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

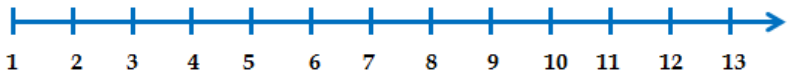
Un conjunto es una colección de objetos que se define mediante una propiedad que todos los elementos cumplen, por ejemplo el conjunto de los colores primarios seria $C = \{rojo, azul, amarillo\}$. En particular, en esta guía estudiaremos los conjuntos numéricos que corresponden a agrupaciones únicamente de números que cumple con algunas propiedades en común.

1. Números Naturales ($\mathbb{N}$)

Los números naturales aparecen por primera vez en el proceso natural que tuvo el ser humano de contar y ordenar animales, comida, objetos, etc.

El conjunto de los números naturales parte con el número 1 o la unidad, y los otros elementos se forman a partir de la adición sucesiva de unidades de la siguiente manera: 1, 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4, etc. En base a esto, podemos decir que el conjunto de los números naturales es ordenado y posee infinitos elementos.

El conjunto se designa con la letra $\mathbb{N}$ y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., \infty\}$$

1.1. Algunas propiedades de los números naturales

Giuseppe Peano, matemático italiano, fue el creador del sistema axiomático del cual deriva la aritmética de los números naturales, en este caso resulta conveniente acudir a sus axiomas para conocer algunas propiedades que cumplen estos números:

Axiomas de Peano	**Versión actual de los axiomas de Peano**
1 es un número.	1 es un número natural, por lo tanto el conjunto de los números naturales no es vacío.
El sucesor inmediato de un número también es un número.	Si a es un número natural, entonces el sucesor de a, es decir, $a+1$, también es un número natural.
1 no es el sucesor inmediato de ningún número.	1 no es sucesor de ningún número natural, por lo tanto corresponde al primer elemento del conjunto numérico de los naturales.
Dos números distintos no tienen el mismo sucesor inmediato.	Si los sucesores de dos números naturales a y b son distintos, entonces los números naturales a y b son distintos.
Toda propiedad perteneciente a 1 y al sucesor inmediato de todo número que también tenga esa propiedad pertenece a todos los números.	Si un conjunto de números naturales contiene al 1 y a los sucesores de cada uno de sus elementos, entonces contiene a todos los números naturales (Axioma de inducción matemática).

1.2. Algunos subconjuntos importantes de $\mathbb{N}$

1.2.1. Números Pares

Los números pares es un conjunto ordenado con infinitos elementos que corresponden a los números naturales múltiplos de dos. El conjunto se puede representar como se muestra a continuación:

$$Pares = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ..., \infty\}$$

Y matemáticamente se puede expresar asi:

$$P \text{ es un número par} \iff P = 2n \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

1.2.2. Números Impares

Los números impares es un conjunto ordenado con infinitos elementos los que corresponden a todos los números naturales que no son pares. El conjunto se puede representar como se muestra a continuación:

$$Impares = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ..., \infty\}$$

Y matemáticamente se puede expresar asi:

$$I \text{ es un número impar} \iff I = 2n + 1 \text{ ó } I = 2n - 1 \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

En base a los dos subconjuntos vistos anteriormente podemos clasificar todo número natural en par o impar. Al operar con estos números obtenemos las siguientes conclusiones:

- $Par + Par = Par$

  Esto se debe a que cada número par lo podemos expresar de la forma $2n$, donde $n \in \mathbb{N}$, luego tomamos dos números pares arbitarios y los sumamos:

  $$2n + 2m = 2(n + m)$$

  Como $n + m \in \mathbb{N}$ también, se cumple lo propuesto en el enunciado.
  Por ejemplo: $10 + 22 = 32$, donde $32 = 2 \cdot (16)$

- $Impar + Impar = Par$
  Analizamos de manera completamente análoga a la proposición anterior, tomamos dos números impares arbitrarios y luego los sumamos:

  $$(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2[(n + m) + 1]$$

  Nótese que si tomamos cada número impar pero ahora de la forma $2n-1$, el resultado es exactamente el mismo.
  Por ejemplo: $13 + 41 = 54$, donde $54 = 2 \cdot (27)$

- $Par + Impar = Impar$
  Tomamos un número par e impar arbitrarios, $2n$ y $2m + 1$, luego sumamos:

  $$2n + (2m + 1) = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1$$

  Claramente corresponde a un número impar.
  Por ejemplo: $68 + 9 = 77$, donde $77 = 2 \cdot (39) - 1$

- $Par \cdot Par = Par$
  Tomamos los números pares $2n$ y $2m$, ahora procedemos a multiplicarlos:

  $$2n \cdot 2m = 4\,n \cdot m$$

  El número 4 es múltiplo de 2, por lo tanto todo natural de la forma $4n$ es par también, y el producto entre dos números naturales es al mismo tiempo un número natural. Se cumple lo propuesto.
  Por ejemplo: $4 \cdot 14 = 56$, donde $56 = 2 \cdot (28)$

- $Impar \cdot Impar = Impar$
  Volvemos a escoger dos números impares de manera arbitraria, $2n-1$ y $2m-1$, multiplicamos:

  $$(2n-1)(2m-1) = 4n \cdot m - 2n - 2m + 1 = 2[2n \cdot m - (n+m)] + 1$$

  Acá debe tener en cuenta que siempre se cumple que $2n \cdot m - (n+m) \geqslant 0$, por lo tanto tal expresión corresponde a un número natural.
  Por ejemplo: $3 \cdot 7 = 21$, donde $21 = 2 \cdot (10) + 1$

- $Par \cdot Impar = Par$
  Tomamos el par $2n$ y el impar $2m+1$, multiplicamos ambos:

  $$2n \cdot (2m+1) = 4n \cdot m + 2n$$

  Note que el resultado corresponde a la suma de dos números pares y ya demostramos anteriormente que tal suma también corresponde a un número par.
  Por ejemplo: $8 \cdot 11 = 88$, donde $88 = 2 \cdot (44)$

1.2.3. Números Primos

Los elementos del conjunto de los números primos son todos aquellos números naturales mayores que 1, tales que no son exactamente divisibles por algún número, excepto sí mismo y el 1. Por ejemplo el 7 es un número primo ya que sólo lo divide perfectamente el 1 y el 7 ($7:7=1$ y $7:1=7$) en cambio el 10 no es primo ya que lo divide perfectamente el 1,2,5 y 10 ($10:1=10$, $10:2=5$, $10:5=2$ y $10:10=1$)
Este conjunto queda representado por extensión de la siguiente manera:

$$Primos = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ..., \infty\}$$

Como podemos notar existen infinitos números primos, pero su distribución sigue siendo una incógnita hasta nuestros días.

1.2.4. Números Compuestos

El conjunto de los números compuestos es infinito y sus elementos son todos aquellos números naturales mayores que 1 que no son primos, es decir, aquellos números que tienen 2 o más factores.
Este conjunto queda representado por extensión de la siguiente manera:

$$Compuestos = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, ..., \infty\}$$

Al igual que con los números pares e impares, todo número natural se puede clasificar como primo o compuesto, excepto el 1 que no es primo ni compuesto.

Existe el teorema fundamental de la aritmética que relaciona estos dos últimos subconjuntos de la siguiente manera:

> *Todo número n compuesto puede escribirse de manera única, salvo el orden, como un producto de números primos.*

Por ejemplo: $114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$.

1.2.5. Múltiplos de un número

Si tenemos que $24 = 12 \cdot 2$ entonces decimos que 24 es múltiplo de 12 y 2.

En general, si a es un número natural, entonces los múltiplos de a son todos aquellos números que resultan de la multiplicación de a por algún natural. El conjunto de los múltiplos de a es infinito y queda representando como se muestra a continuación:

$$Multiplos\ de\ a = \{b \in \mathbb{N} \mid b = a \cdot n, n \in \mathbb{N}\}$$

Así por ejemplo, la extensión de los múltiplos de 3 se puede escribir como:

$$Multiplos\ de\ 3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ..., \infty\}$$

- **Mínimo común múltiplo (m.c.m)**

  El mínimo común múltiplo de un conjunto de números naturales es el menor múltiplo común distinto de cero de todos esos números.
  Para obtener el m.c.m. de dos o más números en primer lugar descomponemos cada uno en factores primos para luego realizar el producto de los factores comunes y no comunes elevados a su mayor exponente.

  ✎ ***Ejemplo***

  Determinar el mínimo común múltiplo entre 12, 14 y 45

  Solución: Primero descomponemos cada número en factores primos:

  $$12 = 2^2 \cdot 3$$
  $$14 = 2 \cdot 7$$
  $$45 = 3^2 \cdot 5$$

  Luego elegimos los factores primos repetidos y no repetidos con mayor exponente:

  $$2^2, 3^2, 5, 7$$

  Finalmente el producto de los números anteriores es el m.c.m(12,14,45):

  $$m.c.m(12, 14, 45) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$$

1.2.6. Divisores de un número

Si tenemos que $16 = 8 \cdot 2$ entonces decimos que 8 y 2 son divisores de 16.

Si a es un número natural, entonces los divisores de a son todos aquellos números que lo pueden dividir resultando como cociente un número natural y de resto cero. El conjunto de los divisores de a es finito y queda representando como se muestra a continuación:

$$Divisores\ de\ a = \{b \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ tal\ que\ a = b \cdot n\}$$

Así, por ejemplo, la extensión de los múltiplos de 56 se puede escribir como:

$$Divisores\ de\ 56 = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$$

- **Criterios de divisibilidad**

  Existen ciertos criterios para determinar si un número natural es divisible por otro sin la necesidad de realizar la división. A continuación, se exponen los criterios de divisibilidad más comunes en $\mathbb{N}$:

Divisor	Criterio
2	Si termina en cero o cifra par.
3	Si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.
4	Si sus dos últimas cifras son ceros o múltiplo de 4.
5	Si termina en cero o en 5.
6	Si es divisible por 2 y por 3.
7	Si la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 o un múltiplo de 7.
8	Si sus tres últimas cifras son ceros o múltiplo de 8.
9	Si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.
10	Si termina en 0.

- **Máximo común divisor (M.C.D)**

  El máximo común divisor de un conjunto de números naturales es el número más grande que es divisor de todos los elementos del conjunto.
  Para obtener el M.C.D de dos o más números, en primer lugar descomponemos cada uno en factores primos para luego realizar el producto de los factores comunes elevados a su menor exponente.

✎ ***Ejemplo***

Determinar el máximo común divisor entre 6, 18 y 42

Solución: Primero descomponemos cada número en factores primos:

$$6 = 2 \cdot 3$$
$$18 = 2 \cdot 3^2$$
$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Luego elegimos los factores primos repetidos con menor exponente:

$$2, 3$$

Finalmente el producto de los números anteriores es el M.C.D (6,18,42):

$$M.C.D(6, 18, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

Cuando resulta que el único divisor común entre dos números es el 1, entonces se dicen que son ***primos relativos o primos entre sí****. Por ejemplo 8 y 11 son primos relativos ya que el* $M.C.D(8, 11) = 1$

✍ ***Ejercicios*** ***1***

Resolver los siguientes problemas.

1. Camila quiere poner cerámicas en una muralla de su baño que mide $15,3\,[m]$ de largo y $3,5\,[m]$ de ancho. Si desea embaldosar con baldosas cuadradas de la mayor dimensión posible de tal manera que no tenga que cortar ni montar ninguna baldosa. ¿Cuánto medirá el lado cada baldosa?

2. Tres reglas de $3\,[m]$ de largo cada una, se superponen de tal forma que la marca que indica el número 0 coincide en las tres reglas. Si la primera regla está dividida cada $20\,[mm]$, la segunda cada $32\,[mm]$ y la tercera cada $15\,[mm]$, ¿cuáles son las marcas de división que coinciden?

3. La empresa "Mi patria" produce flores de distintos tipos. Si posee tres terrenos de $6.468\,[m^2]$, $5.628\,[m^2]$ y $7.812\,[m^2]$ que desea dividir en terrenos menores de igual área, ¿cuál es el mayor tamaño posible que pueden tener los nuevos terrenos para sembrar? Si planta un tipo de flor por terreno, ¿cuánta diversidad de flores puede tener?

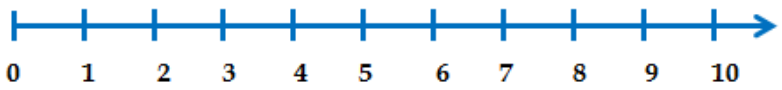
4. Cuatro amigos deciden realizar una carrera en el patio del colegio. Si en llegar a la meta el primero tarda $250\,[s]$, el segundo $140\,[s]$, el tercero $200\,[s]$ y el cuarto $350\,[s]$, partiendo los cuatro amigos juntos, ¿en cuántos segundos volverán a pasar simultáneamente todos por la línea de partida? ¿En cuántos segundos volverán a pasar juntos los 3 primeros por la línea de partida?

---

2. Números Cardinales ($\mathbb{N}_0$)

El conjunto de los números cardinales es ordenado infinito y corresponde al conjunto $\mathbb{N}$ pero se incluye un elemento, el cero.

El conjunto se designa por $\mathbb{N}_0$ y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



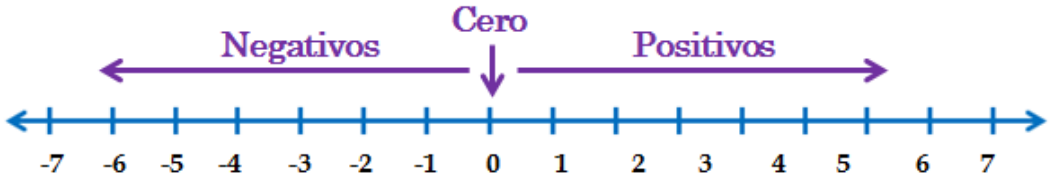
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., \infty\}$$
$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

3. Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

Los números enteros están presentes desde hace mucho tiempo, los chinos utilizaban bastones de colores para distinguir cantidades positivas o negativas para así diferenciar entre el aumento o la disminución de ciertas magnitudes. Los árabes, por otro parte, dieron a conocer los números negativos que los hindúes utilizaban para designar las pérdidas en asuntos financieros.

El conjunto de los números enteros nace entonces a partir de la necesidad de responder a ciertos problemas matemáticos que los números naturales no podían resolver. En base a esto el conjunto está compuesto por los números naturales, el cero y los opuestos a los números naturales.

El conjunto se designa por $\mathbb{Z}$ y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



$$\mathbb{Z} = \{-\infty, ..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., \infty\}$$

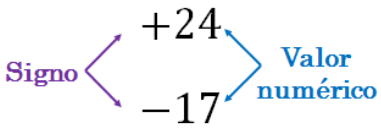
Todo número entero se caracteriza por tener dos elementos:

- **Signo:** Representa la propiedad que un número tiene de ser negativo(-) o positivo(+).

- **Valor absoluto o numérico:** Corresponde a la distancia que le separa al número del 0 en la recta numérica. El valor absoluto de un número, es el número pero sin su signo. Por ejemplo, el valor numérico de -12 es 12 o el valor numérico de 3 es 3.

En general el valor absoluto o numérico de x se identifica con $|x|$ y se trabaja como se indica a continuación:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



3.1. Algunos subconjuntos importantes de $\mathbb{Z}$

3.1.1. Enteros negativos

El conjunto de los enteros negativos tiene como elementos a los números naturales precedidos de un signo menos (-), por ejemplo -4. Este conjunto corresponde a todos los enteros menores que 0 y matemáticamente se puede representar como:

$$\mathbb{Z}^- = \{-\infty, ..., -5, -4, -3, -2, -1\}$$

3.1.2. Conjunto 0

Este conjunto tiene como único elemento el número 0, el cual separa en la recta numérica a los números enteros positivos de los números enteros negativos. Matemáticamente se puede expresar como:

$$\{0\}$$

3.1.3. Enteros positivos

El conjunto de los enteros positivos se puede identificar con el conjunto de los números naturales, por lo tanto, sus elementos son todos los enteros mayores que 0. Matemáticamente se puede representar así:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5..., \infty\} = \mathbb{N}$$

Si unimos estos 3 subconjuntos vistos obtenemos el conjunto de los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

3.2. Operaciones básicas en $\mathbb{Z}$

3.2.1. Adición de números enteros

- **Adición de enteros con igual signo**
  Se suman los valores absolutos y se conserva el signo común.
  Por ejemplo al realizar la operación $-6 + -3$ debemos sumar los números 6 y 3 y conservar el signo negativo que tienen:

$$-6 + -3 = -(6 + 3) = -9$$

- **Adición de enteros con distinto signo**
  Se restan los valores absolutos y se conserva el signo del sumando de mayor valor absoluto.
  Por ejemplo al realizar la operación $-7+2$ nos dara como resultado un número negativo ya que el sumando con mayor valor absoluto (7) es negativo, por lo tanto restamos los números y conservamos el signo $-$:

$$-7+2=-(7-2)=-5$$

Recordar que toda sustracción se puede transformar a una adición. Así, si tenemos $3-4$ es lo mismo que escribir $3+(-4)$. En general si tenemos la resta de dos enteros $a-b$ que puede expresar como una suma de la forma $a+(-b)$

3.2.2. Multiplicación de números enteros

- **Multiplicación de enteros con igual signo**
  Se multiplican los valores absolutos de los números y se deja el producto positivo.
  Por ejemplo al realizar la operación $-2\cdot-8$ multiplicamos los valores absolutos de los números y lo dejamos son signo positivo:

$$-2\cdot-8=+(2\cdot8)=16$$

- **Multiplicación de enteros con distinto signo**
  Se multiplican los valores absolutos de los números y se deja el producto negativo.
  Por ejemplo al realizar la operación $-3\cdot5$ multiplicamos los valores absolutos de los números y lo dejamos con signo negativo:

$$-3\cdot5=-(3\cdot5)=-15$$

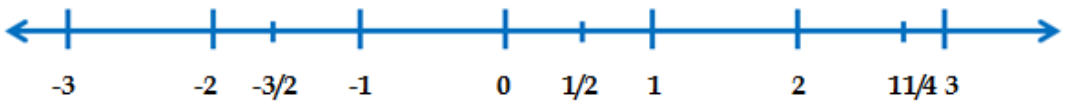
✍ ***Ejercicios*** **2**

Resolver los siguientes ejercicios combinados

1. $-(5\cdot3+11)+4(-9\cdot3+13\cdot4)$
2. $3(9\cdot-2)-(3\cdot-5+7)+(4\cdot23)$
3. $15+6-4+(-3+2\cdot0)-9$
4. $(3-5\cdot5)-(-1(22\cdot3\cdot-4\cdot-2))+(40-68+4-9)$
5. $(-4\cdot6-7)-(-12(3+((4+32)\cdot8))+1)$
6. $-(-(-2(-(7\cdot12)+5)-24)-8\cdot3)$

4. Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

El conjunto de los números racionales es ordenado y posee infinitos elementos. Este conjunto abarca a todos los anteriores y se le agregan aquellos elementos que se pueden expresar en forma de división entre dos números enteros cualesquiera, con la única restricción de que el divisor o denominador tiene que ser distinto de cero. Por lo tanto los números racionales son todos aquellos que pueden ser representados por medio de fracciones. El conjunto se designa por $\mathbb{Q}$ y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



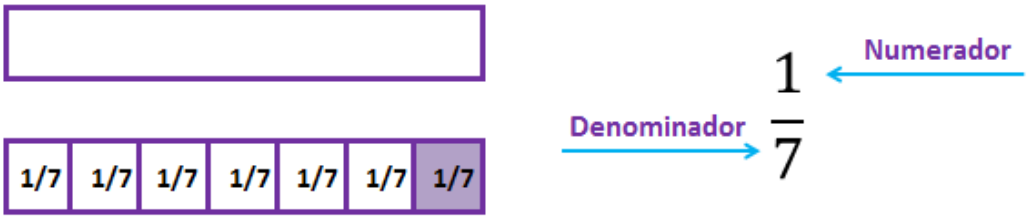
$$\mathbb{Q} = \{-\infty, ..., -3, ..., \frac{-8}{3}, ..., -2, ..., \frac{-6}{4}, ..., -1, ..., 0, ..., \frac{1}{2}, ..., 1, ..., \infty\}$$

Cabe destacar que este conjunto $\mathbb{Q}$ tiene la propiedad de ser **denso**, es decir, siempre entre dos racionales cualesquiera, encontraremos un tercero entre medio, por muy próximos que estén los números entre sí.

Entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

4.1. Fracciones, los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$

En nuestro diario vivir utilizamos expresiones como "un cuarto para las 8", "me queda la mitad" o "los goles son válidos desde mitad de cancha". Dentro de éstas expresiones estamos utilizando fracciones ya que hacen alusión a dividir una totalidad en cierta cantidad de partes iguales. En base a esto, una fracción se puede definir como la división de dos números cualesquiera, a/b, donde a (numerador) indica el número de partes iguales que se han tomado y b (denominador distinto de 0) indica el número de partes iguales en la que se ha divido un entero. Por lo tanto, si tenemos $\frac{1}{7}$ significa que dividimos un entero en 7 partes iguales y de esas partes tomamos una.



4.1.1. Tipos de fracciones

- **Fracciones Propias**

  Una fracción propia tiene el numerador menor que el denominador. Por ejemplo $\frac{2}{5}$.

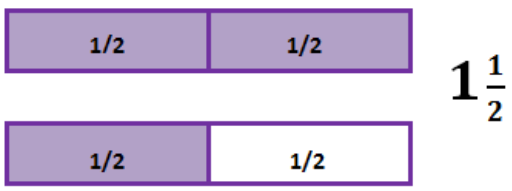
  En general, la fracción $\frac{a}{b}$ es propia si $|a| > |b|$.

- **Fracciones Impropias**

  Una fracción impropia tiene el numerador mayor que el denominador. Por ejemplo $\frac{13}{8}$.

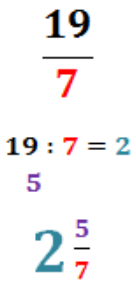
  En general, la fracción $\frac{a}{b}$ es impropia si $|a| < |b|$.

  Este tipo de fracciones se puede interpretar de la siguiente forma. Si tenemos $\frac{3}{2}$ significa que debemos tomar 3 veces $\frac{1}{2}$, esto lo conseguimos tomando dos partes de un entero dividido en dos y una parte de otro entero equivalente al primero.



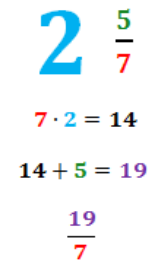
Por lo tanto, tomamos finalmente un entero más un medio. Este tipo de números se denominan números mixtos o fracción mixta.

Para transformar una fracción impropia a un número mixto debemos seguir los siguientes pasos:



1. Dividir el numerador por el denominador.
2. Escribir el cociente de la división como un número entero.
3. Escribir el resto encima del denominador.

Para transformar un número mixto a fracción debemos seguir los siguientes pasos:



1. Multiplicar la parte entera por el denominador.
2. Sumar el resultado al numerador
3. Escribir el resultado sobre el denominador.

4.1.2. Equivalencia de fracciones

Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad, es decir, tienen el mismo valor. Las fracciones $\frac{90}{6}$ y $\frac{60}{4}$ valen 15, por lo tanto tienen el mismo valor y son equivalentes entre sí.

Dadas dos fracciones diremos que representan un mismo número racional si cumplen la siguiente condición:

$$\frac{-12}{16} = \frac{6}{-8}$$
$$-12 \cdot -8 = 16 \cdot 6$$
$$96 = 96$$

En general, dados dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

4.1.3. Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción corresponde a dividir ambas partes (numerador y denominador) por un número entero de tal forma que me dé como resultado una fracción equivalente. La fracción $\frac{150}{20}$ la podemos simplificar por el entero 10 para asi obtener una fracción equivalente.

$$\frac{150}{20} = \frac{150 : 10}{120 : 10} = \frac{15}{2}$$

En general, una fracción $\frac{a}{b}$ *se puede simplificar por* $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ *haciendo:*

$$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$$

Siempre y cuando c *sea divisor de* a *y* b.

Al momento de simplificar una fracción nos interesa reducirla a su mínima expresión, es decir, dividirla por el mayor número posible. Ese número corresponde al máximo común divisor que existe entre el numerador y el denominador, de esta forma el dividir ambas partes de la fracción por ese número obtenemos inmediatamente la **fracción irreducible**.

4.1.4. Amplificación de fracciones

Amplificar una fracción corresponde a multiplicar ambas partes (numerador y denominador) por un número entero de tal forma que me dé como resultado una fracción equivalente. La fracción $\frac{2}{5}$ la podemos amplificar por 4 para obtener una fracción equivalente.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$$

En general, una fracción $\frac{a}{b}$ se puede amplificar por $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ haciendo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

4.1.5. Transformación de fracciones

Todo elemento del conjunto de los números racionales se puede expresar como una fracción, pero también pueden ser representados a través de un número decimal, ya que para esto basta realizar la división entre el numerador y el denominador y se puede obtener como resultado un número entero o decimal. Veamos algunas transformaciones importantes:

- **De un número entero a fracción**

  La fracción tendrá como numerador el número dado, y por denominador, la unidad 1. Por ejemplo $4 = \frac{4}{1}$ ó $-18 = \frac{-18}{1}$.

- **De un número con decimales finitos a fracción**

  La fracción tendrá como numerador el número dado sin la coma, y por denominador, la unidad 1 seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga. Por ejemplo el número $8,74$ posee dos cifras decimales así que, $8,74 = \frac{874}{100}$ o el número $234,1$ posee una cifra decimal así que, $234,1 = \frac{2341}{10}$.

- **De un número con decimales periódicos a fracción**

  La fracción tendrá como numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera, y por denominador, un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período. Por ejemplo el número $2,\overline{45}$ tiene dos cifras periódicas, por lo tanto, $2,\overline{45} = \frac{245-2}{99} = \frac{243}{99}$ o el número $31,\overline{1}$ tiene una cifra periódica así que, $31,\overline{1} = \frac{311-31}{9} = \frac{280}{9}$.

- **De un número con decimales semiperiódicos a fracción**

  La fracción tendrá como numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera seguida de las cifras decimales no periódicas, y por denominador, un numero formado por tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal no periódica. Por ejemplo el número $1,63\overline{192}$ tiene 3 cifras periódicas y 2 cifras en la parte decimal no periódicas, por lo tanto se escribirá como $1,63\overline{192} = \frac{163192 - 163}{99900} = \frac{163029}{99900}$ ó el número $37,2\overline{5}$ tiene 1 cifra periódica y 1 cifra en la parte decimal no periódica, por lo tanto se expresaría como $37,2\overline{5} = \frac{3725 - 372}{90} = \frac{3353}{90}$.

✍ ***Ejercicios*** ***3***

Transformar a fracción los siguientes números decimales:

1. $13,56$
2. $-87,6$
3. $231,\overline{65}$
4. $-68,\overline{723}$
5. $54,18\overline{3}$
6. $-1,34\overline{95}$

4.2. Orden en $\mathbb{Q}$

Como dijimos al comienzo el conjunto de los números racionales es ordenado, por lo tanto se puede establecer un orden entre los elementos del conjunto, es decir, puedo ordenar las fracciones de menor a mayor o viceversa. Algunos criterios para ordenar las fracciones se presentan a continuación:

- Si dos o más fracciones tienen igual denominador, entonces es mayor la fracción que posea mayor numerador.

$$\frac{10}{9} < \frac{16}{9}$$

  En general, sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \iff a < b$$

- Si dos o más fracciones tienen igual numerador, entonces es mayor la fracción con menor denominador.

$$\frac{15}{6} < \frac{15}{2}$$

  En general, sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{c} \iff c < b$$

- Si dos o más fracciones tienen distinto denominador y numerador la relación de orden se define del siguiente modo:

$$\frac{1}{2} > \frac{2}{-3}$$
$$\frac{(1 \cdot -3) - (2 \cdot 2)}{2 \cdot -3} > 0$$
$$\frac{7}{6} > 0$$

En general, sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $c, d \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} > 0$$

4.3. Operaciones básicas en $\mathbb{Q}$

4.3.1. Adición de números racionales

Al sumar o restar dos fracciones obtenemos una fracción cuyo numerador corresponde a la suma o resta de dos enteros y cuyo denominador corresponde al máximo común divisor entre los denominadores iniciales. Por ejemplo

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{5} = \frac{5 + 12}{30} = \frac{17}{30}$$
$$\frac{-4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{-8 - 9}{6} = \frac{-17}{6}$$
$$\frac{20}{13} + \frac{3}{13} = \frac{20 + 3}{13} = \frac{23}{13}$$

La adición o sustracción de racionales se define entonces se la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

En el caso de que los denominadores sean iguales, la expresión anterior se puede reducir a:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

4.3.2. Multiplicación de números racionales

Al multiplicar dos fracciones obtenemos una fracción cuyo numerador corresponde al producto de los numeradores iniciales y el denominador corresponde al producto de los denominadores iniciales. Por ejemplo

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{12} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 12} = \frac{14}{36}$$

La multiplicación de racionales se define entonces se la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

4.3.3. División de números racionales

Al dividir dos fracciones obtenemos una fracción cuyo resultado corresponde a la multiplicación cruzada de los numeradores y denominadores de las fracciones. Por ejemplo

$$\frac{11}{3} : \frac{6}{5} = \frac{11 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{55}{18}$$
$$\frac{11}{3} : -4 = \frac{11}{3} : \frac{-4}{1} = \frac{-11}{12}$$

La división de racionales se define entonces se la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

✍ ***Ejercicios*** ***4***

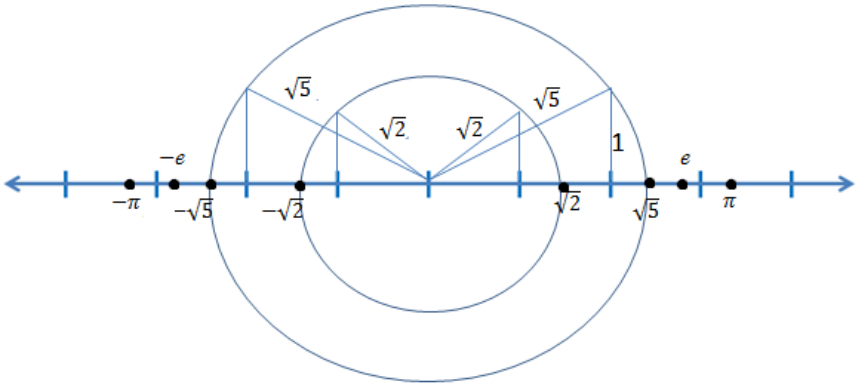
Ordenar de menor a mayor los siguientes números:

1. $\frac{4}{7}$; $\frac{23}{12}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{15}{100}$
2. $12,\overline{4}$; $-10,\overline{2345}$; $0,57\overline{6}$; $23,66$
3. $\left(\frac{5}{9} + 4,3\overline{2}\right)$; $\left(\frac{14}{35} : \frac{15}{9}\right)$; $\left(\frac{1}{6} \cdot \left[\frac{5}{12} - \frac{-12}{5}\right]\right)$
4. $\frac{\frac{3}{5} + 1,1\overline{2}}{4}$; $\frac{-12}{6}$; $\frac{5}{1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{7}}}$

5. Números Irracionales (𝕀)

El conjunto de los números irracionales está compuesto por infinitos elementos que corresponde a aquellos números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas, como consecuencia, no se pueden escribir como fracción de dos números enteros. De acuerdo a lo anterior los elementos de este conjunto son todos aquellos números que no son racionales.

El conjunto se designa con la letra 𝕀 y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



$$\mathbb{I} = \{i | i \notin \mathbb{Q}\}$$

Algunos ejemplos donde aparecen números irracionales que son utilizados con mayor frecuencia son:

- **Pi (π)**

  El número π es la constante que relaciona el perímetro de una circunferencia con la amplitud de su diámetro. Este número lo utilizas generalmente en geometría para calcular perímetro ($P = d\pi$) y área de un círculo ($A = \pi r^2$). Del número se han calculado millones de cifras decimales y aún sigue sin ofrecer un patrón.

$$\pi = 3,141592653589\cdots$$

- **Número áureo (ϕ)**

  El número áureo o razón de oro, se representa con la letra ϕ y nace de la proporción que según los griegos debían tener las cosas bellas. Este número se encuentra presente en diversas situaciones, como por ejemplo en el Partenón, en Atenas, en donde las columnas, el techo y las partes estan en la razón áurea.



$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749\ldots$$

✍ *Ejercicios* **5**

Clasificar los siguientes números en racionales o irracionales según corresponda:

1. $1,0100100010001\ldots$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $-\sqrt{36}$
4. 0
5. $\sqrt{15}$
6. $4,567567567567567\ldots$
7. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
8. $\frac{2 \cdot 1,2\overline{34}}{1,\overline{1}} + \frac{37,\overline{6}}{37,\overline{6}}$
9. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt[3]{8}$
10. $\frac{10}{\frac{2}{7}+\frac{4}{3}} + \frac{\sqrt{8}}{17}$
11. $\pi \cdot \pi$
12. $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}$

5.1. Aproximación de números irracionales

Como vemos hay números con infinitas cifras decimales, para poder trabajar con ellos de manera más fácil es que utilizamos aproximaciones de dichos números.

Para aproximar un número se puede proceder de dos maneras:

- **Truncamiento**
  En el truncamiento de un número decimal se eliminan todas las cifras que no deseamos que aparezcan a partir de un cierto número. Por ejemplo si el número $21,23898\ldots$ lo truncamos en los dos primeros decimales queda $21,23$.

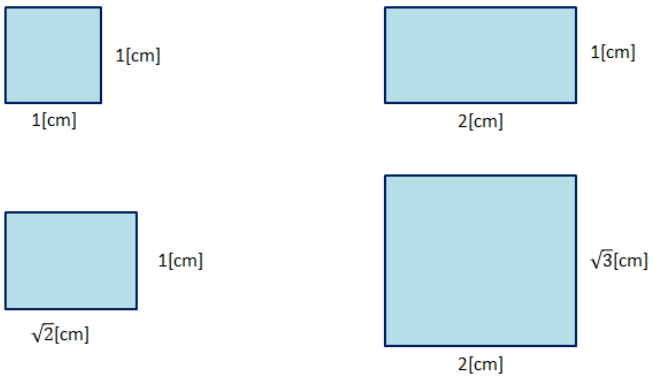
- **Redondeo**
  En la aproximación por redondeo de un numero decimal se observa la cifra decimal que se quiere suprimir:
  - Si esta cifra es menor que 5, entonces se eliminan los decimales. Por ejemplo si el número $132,5679321\ldots$ lo redondeamos a los 4 primeros decimales queda $132,5679$
  - Si esta cifra es mayor o igual a 5, entonces se aumenta un una unidad la última cifra que se conserva en el número. Por ejemplo si el número $92,678592\ldots$ lo redondeamos a los 3 primeros decimales resulta $92,679$.

✍ Ejercicios ***6***

Redondear y truncar los resultados de las siguientes operaciones a los 3 primeros decimales:

1. $63,25 : 4$
2. $1,5478 : 0,25$
3. $0,33 : 8$
4. $3,572 \cdot 0,1$
5. $75,123 \cdot 0,5$
6. $0,2013 \cdot 99$
7. $1,48 : 1,0638$
8. $0,97 \cdot 2,062$

Determinar la diagonal de cada cuadrilátero:



Desafío I



Construir sobre la recta numérica el irracional $\sqrt{17}$. Respuesta

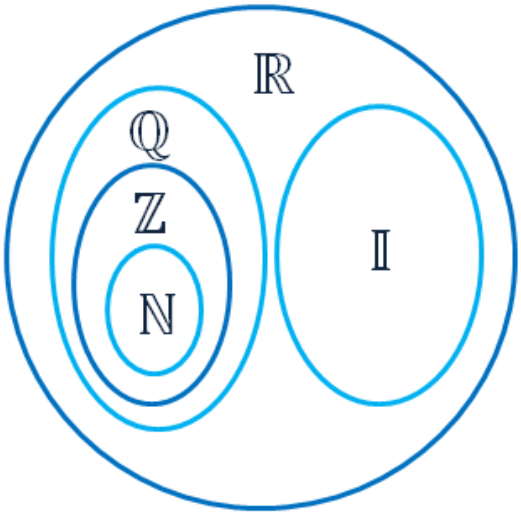
6. Números Reales ($\mathbb{R}$)

El conjunto de los números reales es infinito y ordenado y tiene como elementos tanto los números racionales como los irracionales. De manera matemática se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Al igual que el conjunto de los racionales, los números reales son **densos**, esto es, entre dos números reales cualesquiera existe otro número real. Finalmente con los números reales la recta numérica está completa, es decir, cada número de la recta numérica le corresponde un número real.

En forma gráfica los conjuntos que hemos estudiados quedan representando como se muestra a continuación:



El conjunto de los números reales tiene **estructura algebraica de cuerpo**, esto es, que para las operaciones definidas en $\mathbb{R}$, adición$(+)$ y multiplicación$(\cdot)$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Cerrado**
   Si tomo dos números reales y los sumo o multiplico, ambos resultados corresponden a un número real. Por ejemplo: $5+2=7 \in \mathbb{R}$ y $5 \cdot 2 = 10 \in \mathbb{R}$

   En general, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:

   - $x + y \in \mathbb{R}$
   - $x \cdot y \in \mathbb{R}$

2. **Asociativo**
   Si tengo 3 o más números, la operación que realice es independiente de la agrupación que tengan los números.Por ejemplo: $(2+3)+5 = 10 = 2+(3+5)$ y $(2 \cdot 3)5 = 30 = 2(3 \cdot 5)$

   En general, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces:

   - $(x + y) + z = x + (y + z)$
   - $(x \cdot y)z = x(y \cdot z)$

3. **Conmutativo**
   La operación es independiente del orden de los números. Por ejemplo:, $4 + 2 = 6 = 2 + 4$ y $4 \cdot 2 = 8 = 2 \cdot 4$

   En general, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:

   - $x + y = y + x$
   - $x \cdot y = y \cdot x$

4. **Distributivo**
   La suma de dos sumandos, multiplicada por un número, es igual a la suma de los productos de cada

sumando por ese número. Por ejemplo: $2 \cdot (1+5) = 12 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5$

En general, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces:

- $x(y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

5. **Neutro**
Al operar cualquier elemento del conjunto con el elemento neutro el resultado es el elemento original. Por ejemplo: $2+0=2$ y $3 \cdot 1 = 3$

   En general, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces:

   - Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$
   - Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

6. **Inverso**
Al operar cualquier elemento del conjunto con el elemento inverso el resultado es el elemento neutro correspondiente a cada operación. Por ejemplo: $2 + (-2) = 0$ y $3 \cdot 3{-}1 = 1$

   En general, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces:

   - Existe $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$
   - Existe $x^{-1} = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

6.1. Operaciones en $\mathbb{R}$

Como mencionamos todo número real se puede clasificar en racional o irracional. Al trabajar con las operaciones básicas en este conjunto obtenemos las siguientes conclusiones:

- $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Por ejemplo: $\dfrac{1}{2} + 4 = \dfrac{9}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} + \mathbb{I} = \mathbb{I}$. Por ejemplo: $4 + \sqrt{3} \in \mathbb{I}$
- $\mathbb{I} + \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ ó $\mathbb{I}$. Por ejemplo: $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ ó $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Por ejemplo: $\dfrac{1}{5} \cdot 5 = 1 \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{I} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ ó $\mathbb{I}$. Por ejemplo: $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3 \in \mathbb{Q}$ ó $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{6} \in \mathbb{I}$
- $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I}$, si el número de $\mathbb{Q}$ es distinto de cero. Por ejemplo: $2 \cdot \pi = 2\pi \in \mathbb{I}$

6.2. Expresiones no definidas en $\mathbb{R}$

El conjunto de los números reales es el más grande que se estudia para el caso de la PSU. Sin embargo, hay que tener presente que hay algunas expresiones que no están definidas para este conjunto:

- Raices con índice par y cantidad subradical negativa. Por ejemplo $\sqrt[4]{-16}$
- Fracciones o divisiones en que el denominador o divisor es 0. Por ejemplo $2 : 0$ o $\frac{12}{0}$

- Potencias de base 0 y exponente 0. Por ejemplo 0^0

Desafío II



Juan realizó el siguiente razonamiento matemático:
Dados a y b dos números cualesquiera. Supongamos que $a = b$, entonces:

$$\begin{aligned} a^2 &= ab \\ a^2 + (a^2 - 2ab) &= ab + (a^2 - 2ab) \\ 2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\ 2a(a-b) &= a(a-b) \\ 2a &= a \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

¿Dónde está el error que cometió Juan?

Respuesta

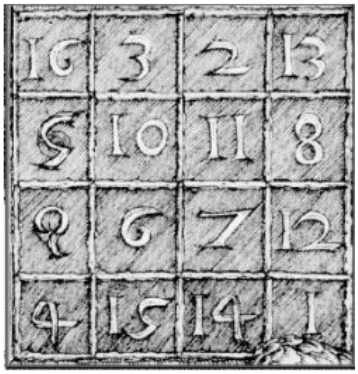
7. Curiosidades Matemáticas

7.1. Cuadrados mágicos

Los cuadrados mágicos son una forma antiquísima de acertijo numérico, consistente en formar un cuadrado con números cuyas filas, columnas y diagonales sumen lo mismo.

A continuación podemos ver como los cuadrados mágicos se han hecho presentes en el arte. El artista Alberto Durero, que data del año 1514, incluyó en su obra "Melancolía" un cuadrado mágico de 4 por 4, en el que sus filas, columnas y diagonales suman lo mismo: 34.





✍ ***Ejercicios*** **7**

Rellenar las casillas en blanco para formar un cuadrado mágico:

11			6
14	9	8	
		17	
	10	7	13

11		7		3
	12		8	
17		13		9
	18		14	
23		19		15

Desafío III



Construir dos cuadrado mágico. En el primero las filas, columnas y diagonales deben sumar 30 y los espacios se deben completar con los primeros 9 números pares. El segundo debe ser creado con los primeros 9 números impares y las filas, columnas y diagonales deben sumar 27. Respuesta

7.2. Regularidades numéricas

En las regularidades numéricas se trata de encontrar un patrón o regla que forma una sucesión. Un patrón es una sucesión de signos que se construyen siguiendo una regla, por ejemplo el conjunto de los números pares sigue un patrón correspondiente a "$2 \cdot n$".
Los patrones que estudiaremos son de recurrencia, es decir, son aquellas series en los que el núcleo cambia con regularidad. Cada término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores de cuyo análisis se infiere su ley de formación.

✎ ***Ejemplo***

¿Cuántos palos se necesitan para formar la figura 21?

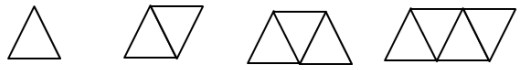


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Solución: Vamos analizando por figura. La primera figura consta de 3 palitos, la segunda de 5 palitos, la tercera de 7 palitos y la cuarta de 9 palitos. En base a esto los números de nuestra sucesión son:

$$3, 5, 7, 9, \ldots$$

Observando estos números podemos darnos cuentas que para formar el número que viene se le suma dos palitos al anterior, de esta manera:

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$
$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

Generalizando, sea n el número de la figura, la cantidad de palitos que se necesita para formar los triángulos queda dado por $2 \cdot n + 1$. Como nos piden el número de palitos que tendrá la figura 21 debemos sustituir en la expresión antes deducida.

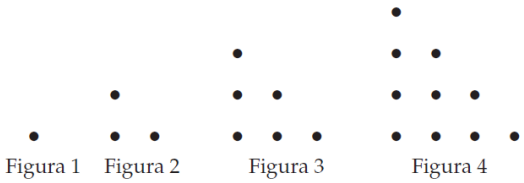
$$2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 21 + 1 = 43$$

Finalmente necesitamos 43 palitos para formar la figura 21.

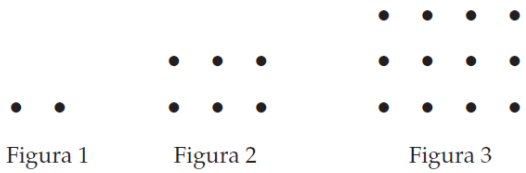
✍ *Ejercicios* **8**

Resolver los siguientes ejercicios.

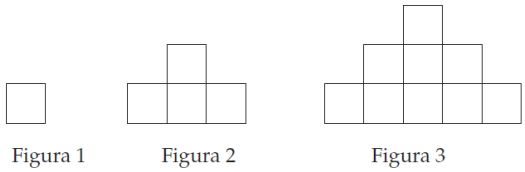
1. ¿Cuántos puntos tendrá la figura 16 de la serie que se muestra a continuación?



2. ¿Cuántos puntos tendrá la figura 20 de la serie que se presenta a continuación?



3. Si el lado de cada cuadradro mide $2\,[cm]$, ¿cuánto valdrá el área de la figura 12?



4. ¿Cuántos puntos tendrá la figura 18 de la secuencia?



Figura 1 Figura 2 Figura 3

5. ¿Cuántos lados tendrá la figura 20?

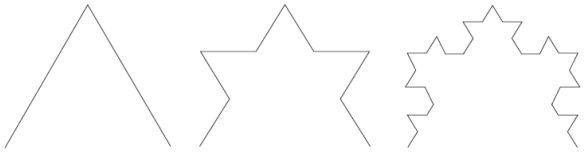
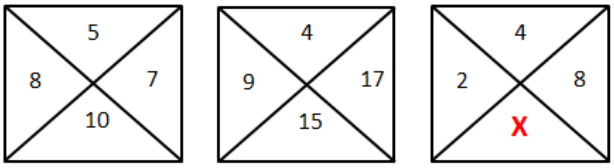
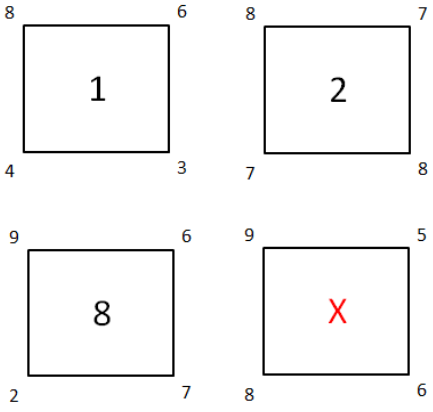


Figura 1 Figura 2 Figura 3

6. ¿Cuánto vale x?



7. ¿Cuánto vale x?



Desafíos resueltos

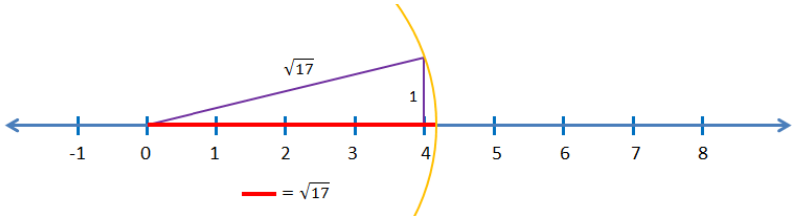
✓ Desafío I: Para construir el número $\sqrt{17}$ sobre la recta numérica se debe construir un triángulo rectángulo de lados 4 y 1 para que así la hipotenusa corresponda al número irracional buscado. Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$4^2 + 1^2 = x^2$$

$$16 + 1 = x^2$$

$$\sqrt{17} = x$$

De esta forma la construcción queda representada así:



Volver

✓ Desafío II: El error de Juan radica en que supuso que a era igual a b, por lo tanto al dividir por $(a-b)$ para pasar de $2a(a-b) = a(a-b)$ a $2a = a$ se está dividiendo por 0 ya que $a-b = a-a = 0$.
Volver

✓ Desafío III: El cuadrado de la derecha es el creado con los números pares y el de la izquierda con los números impares.

16	6	8
2	10	18
12	14	4

3	13	11
17	9	1
7	5	15

Volver

Bibliografía

[1] Apuntes para la preparación de la PSU Matemática, *Segunda Edición, 2009*, *Pamela Paredes Núñez, Manuel Ramírez.*

[2] Libro para el maestro, *Segunda Edición, 2001*, *Jesús Alarcón Bortolussi, Elisa Bonilla Rius, Rocío Nava Álvarez, Teresa Rojano Cevallos, Ricardo Quintero.*

[3] Historia de las Matemática en los últimos 10.000 años, *Edición, 2008*, *Ian Stewart.*

[4] Desarrollo del pensamiento matemático, División, número 7, *Edición, 2006*, *Martín Andonegui Zabala.*

[5] Desarrollo del pensamiento matemático, Divisibilidad, número 8, *Edición, 2006*, *Martín Andonegui Zabala.*