open green road

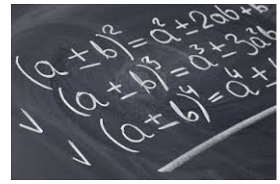
Guía Matemática

PRODUCTOS NOTABLES

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Introducción



Es usual en matemática intentar simplificar todas las expresiones y definiciones, utilizando el mínimo de elementos o símbolos posibles. Es así como por ejemplo nacen las notaciones de multiplicación para la suma reiterada y las potencias para la multiplicación reiterada. En la multiplicación de polinomios también es útil reconocer ciertos resultados típicos que nos ayudan a simplificar y agrupar términos.

2. Multiplicación

En la guía de Operaciones algebraicas hemos hecho referencia básica a la multiplicación en álgebra. En esta oportunidad separaremos esta operación en tres casos: multiplicación de monomios, multiplicación de polinomio por monomio y multiplicación de dos polinomios.

2.1. Monomio × Monomio

Primero multiplicamos los coeficientes y a continuación se escribe el producto de los factores literales, preferentemente en orden alfabético, colocando a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes de cada potencia de la misma base. Los signos vienen dados por la regla de los signos vista anteriormente.

✎ ***Ejemplo***

1. *Hallar el producto de* $3a^3$ *y* $4a^4$

   Solución:

$$\begin{aligned} 3a^3 \cdot 4a^4 &= (3 \cdot 4) \cdot (a^3 \cdot a^4) \\ &= 12 \cdot a^{3+4} \\ &= 12a^7 \end{aligned}$$

2. *Multiplicar* $-xy^2$ *con* $-4mx^2y^3$

   Solución:

$$\begin{aligned} -xy^2 \cdot -4mx^2y^3 &= (-1 \cdot -4) \cdot (xy^2 \cdot mx^2y^3) \\ &= 4 \cdot (mx^{1+2}y^{2+3}) \\ &= 4mx^3y^5 \end{aligned}$$

3. *El resultado de* $3a^m \times \frac{1}{4}a^{m+1}$ *es:*

   Solución:

$$\begin{aligned} 3a^m \times \frac{1}{4}a^{m+1} &= \left(3 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \left(a^m \cdot a^{m+1}\right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot a^{m+m+1} \\ &= \frac{3}{4}a^{2m+1} \end{aligned}$$

Recordar que cuando la base no tiene exponente es porque está elevado a 1, entonces:

$$a^x \cdot a = a^{x+1}$$

✍ *Ejercicios* **1**

Desarrolla las siguientes multiplicaciones

1. $2x \times -5xy$
2. $-3a^2 \times -5ab^2c$
3. $m^2n^3 \times 3m^2n$
4. $xyz \times zw$
5. $-x^a \times -x^{a-2}$
6. $5a^nb^x \times -ab^{x+n}$
7. $a \times (-5a) \times a^3$
8. $(2x^2)(-xy)(-a^2y)$
9. $\left(\frac{1}{2}m^2\right)\left(-\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}mn^x\right)$

2.2. Monomio $\times$ Polinomio

☞¡Mira!

Si tenemos la siguiente situación $a(b+c)$ lo que debemos hacer es aplicar la **distributividad**, esto se traduce en multiplicar el monomio por cada término del polinomio teniendo en cuenta todo lo visto en los puntos anteriores. Entonces la situación anterior quedaría:

$$a(b+c) = ab + ac$$

✎ *Ejemplo*

1. *Multiplicar* $a^3 - 4a^2 + 6a$ *por* $-ab$

   Solución: Denemos resolver $(a^3 - 4a^2 + 6a) \cdot (-ab)$

$$\begin{aligned}(a^3 - 4a^2 + 6a) \cdot (-ab) &= (-ab) \cdot (a^3) + (-ab) \cdot (-4a^2) + (-ab) \cdot (6a) \\ &= -a^{1+3}b + 4a^{1+2}b - 6a^{1+1}b \\ &= -a^4b + 4a^3b - 6a^2b\end{aligned}$$

2. *Hallar el resultado multiplicar* $-ab^2$ *con* $3a^m - b^n + c^3$

   Solución:

$$\begin{aligned}(-ab^2) \cdot (3a^m - b^n + c^3) &= (-ab^2)(3a^m) + (-ab^2)(-b^n) + (-ab^2)(c^3) \\ &= (-1)(3)a^{1+m}b^2 + (-1)(-1)ab^{2+n} + (-1)(+1)ab^2c^3 \\ &= -3a^{m+1}b^2 + ab^{n+2} - ab^2c^3\end{aligned}$$

Desafío 1

¿Cuál es el multiplicando que falta para que la siguiente expresión sea verdadera? Respuesta

$$3a^2b^{-2} \times \textbf{?} = 1$$

2.3. Polinomio × Polinomio

Para realizar esta operación se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador. Debemos considerar las indicaciones y recomendaciones de los otros puntos anteriores. En el caso más simple, si queremos entontrar el producto de $a-b+c$ con $d+e$, debemos multiplicar cada término del primer factor, por cada término del segundo factor:

$$\begin{aligned}(a-b+c)(d+e) &= (a-b+c)d+(a-b+c)e \\ &= ad-bd+cd+ae-be+ce\end{aligned}$$

Como la multiplicación es conmutativa en este contexto, llegamos al mismo resultado si hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(a-b+c)(d+e) &= a(d+e)-b(d+e)+c(d+e) \\ &= ad+ae-bd-be+cd+ce \\ &= ad-bd+cd+ae-be+ce\end{aligned}$$

✎ *Ejemplo*

Multiplicar $5x-3y$ *por* $-5y+2x$.
Solución:

$$\begin{aligned}(5x-3y)(-5y+2x) &= 5x(-5y)+5x(2x)-3y(-5y)-3y(2x) \\ &= -25xy+10x^2+15y^2-6xy \\ &= 10x^2+15y^2-31xy\end{aligned}$$

Notar que en ejemplo y el caso presentado anteriormente hay dos maneras diferentes de abordar la misma situación.

✍ *Ejercicios* **2**

Escribe el producto de cada multiplicación aplicando simplificación de términos semejantes

1. $3x^2-x$ por $-2x$
2. a^3-2a^2+6a por $2ab$
3. $m^4-2m^2n^2+5n^4$ por $-2m^3x$
4. $a^m-a^{m-1}+a^{m-2}$ por $-4a$
5. $a-b$ por $a+b$
6. $a+3$ por $a-2$
7. $x+7$ por $x-5$
8. $-m+6$ por $4-m$
9. $x^2+2xy+y^2$ por $y-x$
10. a^2+b^2-2ab por $a+b$
11. m^3-4m+m^2-1 por m^3+1
12. $a^x-a^{x+1}+a^{x+2}$ por $a-1$
13. $a^{n-1}-2a^n+3a^{n+2}$ por $a+a^n+1$

Veamos el siguiente ejemplo donde se desarrolla una multiplicación de polinomios con exponentes literales

✎ ***Ejemplo***

Desarrollar $a^{m+1} + 3a^{m-2} - a^{1-m}$ *por* $a^2 - 3a$

Solución:

$$
\begin{aligned}
(a^{m+1} + 3a^{m-2} - a^{1-m})(a^2 - 3a) &= \\
&= a^{m+1}a^2 + 3a^{m-2}a^2 - a^{1-m}a^2 + a^{m+1}(-3a) + 3a^{m-2}(-3a) - a^{1-m}(-3a) \\
&= a^{m+1+2} + 3a^{m-2+2} - a^{1-m+2} - 3a^{m+1+1} - 9a^{m-2+1} + 3a^{1-m+1} \\
&= a^{m+3} + 3a^{m} - a^{3-m} - 3a^{m+2} - 9a^{m-1} + 3a^{2-m}
\end{aligned}
$$

Podemos fijarnos que, antes de simplificar los términos semejantes, el número de términos que tiene el producto es igual a la multiplicación entre el número de términos de cada polinomio. Esto nos puede ayudar para saber si hemos hecho todas las multiplicaciones necesarias.

3. Productos notables

Se le denomina **producto notable** a ciertos productos algebraicos cuyo resultado puede ser obtenido por simple inspección o identificación, sin necesidad de hacer una verificación mediante la multiplicación término a término.

3.1. Cuadrado de binomio

☞¡Mira!

Se le llama **cuadrado de binomio** al resultado de elevar al cuadrado la suma o sustracción de dos cantidades. Digamos que las cantidades con a y b, entonces el **cuadrado de la suma** de a y b será equivalente a multiplicar $a + b$ por sí mismo.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a^2 + ab + ba + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

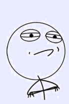
Para el **cuadrado de la diferencia** entre dos cantidades a y b realizamos el mismo procedimiento.

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\
&= a^2 - ab - ba + b^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

En modo general, el cuadrado de la suma (o diferencia) de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más (o menos) el doble del primero por el segundo término más el cuadrado de la segunda cantidad:

$$(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Desafío 2



Mostrar que la siguiente igualdad es cierta: $(a-b)^2 = (b-a)^2$ Encuentra por lo menos 2 formas de mostrar que es verdadera la afirmación. Respuesta

3.2. Suma por diferencia

☞¡Mira!

Se denomina al producto entre la suma de dos cantidades y la diferencia de esas mismas cantidades. Si los términos son a y b etonces la suma por diferencia es $(a+b)(a-b)$. Al efectuar la multiplicación obtenemos:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

La suma de dos cantidades multiplicada por la diferencia de las cantidades es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Desafío 3

Verificar la siguiente afirmación:

$$(a+b)(b-a) \neq a^2 - b^2$$

Respuesta

✎ ***Ejemplo***

Escribir el resultado de $(1+3x^2)^2$ *por simple inspección.*

Solución: Es simple ver que se trata de un cuadrado de la suma de un binomio. En tal caso el resultado es igual al cuadrado del primero más el doble del primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término. El cuadrado del primero es

$$1^2 = 1$$

El doble del primero por el segundo es

$$2[(1)\cdot(3x^2)] = 6x^2$$

y el cuadrado del segundo es

$$(3x^2)^2 = 9x^4$$

Entonces

$$(1+3x^2)^2 = 1 + 6x^2 + 9x^4$$

Desafío 4

¿Es cierto que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$? Utiliza argumentos matemáticos para responder.
Respuesta

✍ *Ejercicios* *2*

Escribe el resultado por simple inspección, sin hacer desarrollos.

1. $(x+2)^2$
2. $(5+y)^2$
3. $(a-3)^2$
4. $(5a+b)^2$
5. $(3-2x)^2$
6. $(2m+3n)^2$
7. $(2ax-1)^2$
8. $(x^3-b^3)^2$
9. $(12x^3-9xy^4)^2$
10. $(x^m+y^n)^2$
11. $(x-y)(x+y)$
12. $(a-x)(x+a)$
13. $(2m-1)(2m+1)$
14. $(1+3mn)(3mn-1)$
15. $(a^2-b^3)(a^2+b^3)$
16. $(2-8xy)(8xy+2)$
17. $(a^{m+1}+1)(a^{m+1}+1)$
18. $(a^{m+1}+1)(a^{m+1}-1)$

3.2.1. Caso especial

En algunos casos el producto de trinomios también puede reducirse a una suma por diferencia. Si efectuamos la siguiente multiplicación:

$$(a+b+c)(a+b-c)$$

Podemos usar la asociatividad de la adición para separar los términos de la sigiente manera:

$$([a+b]+c)([a+b]-c)$$

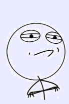
En esta situación podemos identificar la **suma por diferencia** entre los términos $[a+b]$ y c. Entonces el resultado será:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+b-c) &= ([a+b]+c)([a+b]-c)\\ &= [a+b]^2-c^2\\ &= [a^2+2ab+b^2]-c^2\\ &= a^2+2ab+b^2-c^2\end{aligned}$$

De la misma manera el producto $(a+b+c)(a-b-c)$ lo podemos resolver reescribiéndolo como una suma por diferencia aplicando la asociatividad para la adición.

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a-b-c) &= (a+[b+c])(a-[b+c])\\ &= a^2-[b+c]^2\\ &= a^2-[b^2+2bc+c^2]\\ &= a^2-b^2-2bc-c^2\end{aligned}$$

Desafío 5



Resolver $(3x+4y+z)(3x-z+4y)$ usando productos notables.

Respuesta

3.3. Cubo de binomio

Es elevar al cubo la suma o resta de dos términos. Si los términos son a y b y se están **sumando** tendremos:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\
&= (a+b)^2(a+b)\\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

Si ahora elevamos $a-b$ al cubo tendremos:

$$
\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)(a-b)\\
&= (a-b)^2(a-b)\\
&= (a^2-2ab+b^2)(a-b)\\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{aligned}
$$

De manera general, el cubo de la suma (resta) de dos términos es igual al cubo de la primer término más (menos) el triple del primero al cuadrado por el segundo, más el triple del primero por el segundo término al cuadrado, más (menos) el segundo término al cubo.

$$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

3.4. Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$

☞¡Mira!

Si resolvemos la operación obtenemos

$$
\begin{aligned}
(x+a)(x+b) &= x^2+bx+ax+ab\\
&= x^2+(a+b)x+ab
\end{aligned}
$$

De este caso genérico podemos desprender que el resultado de $(x+a)(x+b)$ tiene la siguiente estructura:

- El primer término es igual al producto de los dos primeros términos de los binomios, en este caso x^2 .
- El coeficiente del segundo término es la suma algebraica de los segundos términos de los binomios, en este caso $a+b$. El segundo término del producto es el primer término de cada binomio, elevado a un exponente igual a la mitad del exponente del primer término del producto. En este caso como el primer término del producto es x^2, entonces el segundo término será x .
- El tercer término del producto es igual a la multiplicación algebraica de los segundo términos de cada binomio, en el caso anterior es ab

✎ Ejemplo

Resolver por observación.

1. $(x+2)(x+3) =$

   Solución: El primer término será x^2, el coeficiente del segundo término es $2+3$ y la parte literal es x. El tercer término es $2 \cdot 3 = 6$. Entonces

   $$(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$$

2. $(x+3)(x-2) =$

   Solución: El resultado es

   $$(x+3)(x-2) = x^2 + (3-2)x + (3 \cdot -2) = x^2 + x - 6$$

3. $(x-2)(x-5) =$

   Solución: El resultado es

   $$x^2 + (-2-5)x + (-2 \cdot -5) = x^2 - 7x + 10$$

En general, podemos decir que para el producto de dos binomios:

$$(x^n + a)(x^n + b) = x^{2n} + (a+b)x^n + (a \cdot b)$$

donde a, b y n pueden tomar el valor de cualquier número o letra.

✍ Ejercicios 3

Escribe el resultado por simple inspección, sin hacer desarrollos.

1. $(a+2)^3$
2. $(x+1)^3$
3. $(1-m)^3$
4. $(n-5)^3$
5. $(2x+1)^3$
6. $(a+2b)^3$
7. $(2x-3y)^3$
8. $(1+m^2)^3$
9. $(a^2+5b)^3$
10. $(x+1)(x+2)$
11. $(a+3)(a-5)$
12. $(z-1)(z+3)$
13. $(b-7)(b-11)$
14. $(n^2-1)(n^2+12)$
15. $(a^3-3)(a^3+9)$
16. $(x^6+7)(x^6+2)$
17. $(ab+6)(ab-7)$
18. $(x^2y^2-1)(x^2y^2+2)$
19. $(z^{x+1}-3)(z^{x+1}-7)$

3.5. Suma o diferencia de cubos perfectos

Al desarrollar el producto entre $a+b$ y a^2-ab+b^2 se obtiene

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\ &= a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

Entonces

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Así mismo si resolvemos el producto entre $a-b$ y a^2+ab+b^2 se obtiene

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3+a^2b-ab^2-a^2b+ab^2-b^3\\ &= a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

Entonces

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

4. Factorización

Se denomina **factorización** a la acción de reescribir una expresión algebraica como producto de sus **factores o divisores**. Llamamos factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones que multiplicadas dan como resultado a la primera expresión. Por ejemplo:

$$x^2+xy=x(x+y)$$

En este caso x y $(x+y)$ son factores o divisores de x^2+xy. Veamos el siguiente ejemplo:

$$x^2+7x+10$$

Podemos reconocer que es el resultado del producto notable de la forma $(x+a)(x+b)$ donde $a=2$ y $b=5$, entonces

$$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$$

Por lo tanto los factores o divisores de $x^2+7x+10$ son $(x+2)$ y $(x+5)$.

Cabe destacar que no todos los polinomios se pueden descomponer en dos o más factores distintos de 1, ocurriendo lo mismo que en la Aritmética con los números primos, existen polinomios que sólo son divisibles por 1 y por sí mimos. En el caso que el polinomio tenga factores distintos de 1 y sí mimos es recomendable conocer algunos casos típicos y cómo factorizarlos.

4.1. Factorización por factor común

Cuando todos los términos de un polinomio tienen un mimso factor, podemos descomponer el polinomio como la multiplicación de el o los factores comunes de cada término y el polinomio que *nos falta* para completar el polinomio original, por ejemplo:

$$a^2 + ab$$

Cada término del binomio tiene en común el factor a, entonces escibiremos

$$a^2 + ab = a(\_\_\_\_)$$

Ahora debemos pensar paso a paso ¿por cuánto debo multiplicar a para obtener cada término del binomio? Lo primero será buscar el término tal que al multiplicarlo por a de como resultado el primer término del binomio, en este caso a^2. Es fácil darnos cuenta que el término bucado es a. Finalmente nos preguntamos ¿por qué debo multiplicar a para obtener ab? Obviamente es b. Entonces la factorización queda:

$$a^2 + ab = a(a + b)$$

Veamos otro ejemplo, si ahora queremos descomponer en sus factores el polinomio

$$15y^3 + 20y^2 - 5y$$

Notemos que todos los términos del polinomio tienen en común el factor y, además los coeficientes son múltiplos de 5. Entonces $5y$ es factor común de cada término, entonces:

$$15y^3 + 20y^2 - 5y = 5y(\_\_\_\_\_\_)$$

Para obtener $15y^3$ debemos multiplicar $5y$ por $3y^2$
Para obtener $20y^2$ debemos multiplicar $5y$ por $4y$
Para obtener $-5y$ debemos multiplicar $5y$ por -1
Finalmente la factorización quedará:

$$15y^3 + 20y^2 - 5y = 5y(3y^2 + 4y - 1)$$

El factor común es igual al producto entre el ***máximo común divisor*** *de los coeficientes numéricos y la parte literal compuesta por todas las letras en común, elevadas a la mínima potencia que aparecen.*

4.2. Polinomio como factor común

No en todos los casos el factor común es un monomio, puede ser un polinomio como en el siguiente ejemplo:

$$x(a + b) + y(a + b)$$

Acá el factor común es $(a + b)$, entonces factorizamos por ese término y nos fijamos por cuánto tenemos que multiplicar para obtener cada término de la expresión original.

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Veamos otro caso similar en donde el factor común es un binomio:

$$2(x-1)+3y(x-1)$$

En este caso el factor común entre los dos términos es $(x-1)$ y la factorización queda:

$$2(x-1)+3y(x-1)=(x-1)(2+3y)$$

✍ ***Ejercicios*** *4*

Escribe cada expresión algebraica como multiplicación de sus factores.

1. $b+b^2$
2. x^3-x^2
3. $6a^2-3a$
4. x^2w+x^2z
5. $16m^2-6mn$
6. x^3-x^2+x
7. $5ax^2+125ax-a^2x$
8. $a(n-2)+b(n-2)$
9. $12(b-a)-4(a-b)$
10. $x(m+2)+m+2$
11. $x^2+1-n(x^2+1)$
12. $-a-b+5(a+b)$
13. $(a+2)(a+2)-4(a+2)$
14. $3m(x+y)(x-y)-2n(x^2-y^2)$
15. $(a+1)(a-2)+3b(a-2)$
16. $a^5(x+y-z)-b^5(x+y-z)$

4.3. Factorización por agrupación de términos

Otra situación a la que nos podemos enfrentar es donde podemos agrupar términos aplicando la asociatividad de la suma para luego factorizar. La estrategia consiste en identificar los grupos de términos que tengan factores comunes, agruparlos y factorizar. Veamos el siguiente ejemplo:

$$mx+nx+my+ny$$

Los dos primeros términos comparten en común la x y el tercero con el cuarto comparten en común la y, entonces:

$$mx+nx+my+ny=(mx+nx)+(my+ny)=x(m+n)+y(m+n)$$

Ahora la expresión tiene como factor común a $(m+n)$.

$$mx+nx+my+ny=x(m+n)+y(m+n)=(m+n)(x+y)$$

✎ ***Ejemplo***

Factorizar la expresión $3m^2-6mn+4m-8n$
Solución:

$$\begin{aligned}3m^2-6mn+4m-8n &= (3m^2-6mn)+(4m-8n)\\ &= 3m(m-2n)+4(m-2n)\\ &= (m-2n)(3m+4)\end{aligned}$$

✍ ***Ejercicios*** **5**

Escribe cada expresión algebraica como descomposición de sus factores.

1. $a^2 + ab + ax + bx$
2. $x^2 - a^2 + x - a^2x$
3. $4a^3 - a^2 + 4a$
4. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$
5. $a^3 + a^2 + a + 1$
6. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$

4.4. Factorizar utilizando producto notable

La gran ventaja de conocer muy bien los productos notables es identificarlos en expresiones complejas, para escribirlas en su forma compacta o factorizada. Esta manera de factorizar implica ir en el sentido opuesto de lo expuesto anteriormente, por ejemplo si queremos factorizar la expresión $a^2 - b^2$ debemos reconocer que es una **suma por diferencia**, entonces:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Lo mismo ocurre con todos los productos notables, por ejemplo si queremos factorizar $x^2 + 2x + 1$ nos podemos dar cuenta que corresponde al resultado expandido del cuadrado de binomio $(x+1)^2$. Notar que el primer y tercer término están al cuadrado:

$$(x)^2 + 2x + (1)^2$$

El segundo término es igual al doble de x por 1.

✎ ***Ejemplo***

Factorizar $a^2 + 2ab + b^2 - 1$
Solución: Notar que podemos agrupar la expresión en dos partes

$$(a^2 + 2ab + b^2) - 1$$

El primer término es un cuadrado de binomio.

$$(a + b)^2 - 1$$

Notemos que es una diferencia de cuadrados de la forma $x^2 - y^2$ entonces:

$$a^2 + 2ab + b^2 - 1 = (a + b)^2 - 1 = ([a + b] + 1)([a + b] - 1) = (a + b + 1)(a + b - 1)$$

La mejor manera de conocer e identificar los productos notables para factorizar es ejercitando y comprobando los resultados.

En general para comprobar que la factorización es correcta basta con multiplicar los factores y verificar que obtenemos la misma expresión que se factorizó.

✍ *Ejercicios* 6

Escribe cada expresión algebraica como descomposición de sus factores.

1. $a^2 + 2ab + b^2$
2. $x^2 + 4x + 4$
3. $x^2 - 2x + 1$
4. $9 - 6b + b^2$
5. $m^4 + 12m^2 + 36$
6. $a^2 - 1$
7. $16 - x^2$
8. $\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{b}{16}$
9. $a^2 - 25$
10. $a^{10} - 49b^{12}$
11. $100 - a^2b^6$
12. $(x - y)^2 - (c + d)^2$
13. $x^2 - 2xy + y^2 - 1$
14. $x^2 + 7x + 10$
15. $x^2 + x - 2$
16. $x^2 - 9x + 8$
17. $x^2 - 5x - 36$
18. $m^3 + 3m^2 + 3m + 1$
19. $1 + 3a^2 - 3a - a^3$

Desafíos resueltos

- ✓ Desafío I: Cualquier expresión elevada a 0 es igual a 1. Entonces debemos buscar un monomio tal que al sumar los exponentes de cada factor literal de 0. Debe tener base ab, el exponente de a debe ser -2 y el exponente de b debe ser 2. El coeficiente del otro multiplicando debe ser $\frac{1}{3}$. Finalmente el multiplicando es $\frac{1}{3}a^{-2}b^2$ Volver

- ✓ Desafío II: Una manera de mostrar que la igualdad es cierta es desarrollar ambos lados de la igualdad y llegar a una misma expresión. Otra manera, por simple inspección es darnos cuenta que $a-b=-(b-a)$ y si las elevamos al cuadrado ambas tenemos

$$(a-b)^2 = (-(b-a))^2$$

$$(a-b)^2 = (-1)^2(b-a)^2$$

Pero $(-1)^2$ es 1 así que

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

Volver

- ✓ Desafío III: Es cierto, ya que si desarrollamos el término de la derecha es obtenemos

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

entonces

$$(a+b)(b-a) \neq (a+b)(a-b)$$

debido a que

$$a-b \neq b-a$$

Volver

- ✓ Desafío IV: Falso, ya que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

que es diferente a a^2+b^2 Es un error recurrente en los estudiante, esperemos que con esto quede claro que es falso. Volver

- ✓ Desafío V:

$$(3x+4y+z)(3x-z+4y) = ([3x+4y]+z)([3x+4y]-z)$$

Es una suma por diferencia

$$[3x+4y]^2 - z^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - z^2$$

Volver

Bibliografía

[1] Álgebra, *Edición 1983*, CODICE S.A. Madrid (1983)
Dr. Aurelio Baldor.

[2] Apuntes para la preparación de la PSU Matemática, *Segunda Edición, 2009*,
Pamela Paredes Núñez, Manuel Ramírez.