open green road

Guía Matemática

CONGRUENCIA

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

1. Congruencia

Es probable que en alguna conversación hayas escuchado frases como "Yo tengo una polera igual a la tuya", "Eres igual a tu mamá" o "Me quedo igual tu firma" para referirse a que dos cosas son iguales pese a que no ocupan el mismo lugar en el espacio, sino más bien, que comparten las mimas características. Cuando esto sucede estamos haciendo referencia directa a lo que es la congruencia entre dos objetos por sobre la igualdad que solemos utilizar en nuestras palabras.

La congruencia hace referencia a la coincidencia que existe entre dos figuras geométricas en su forma y en su tamaño a pesar de que sus posiciones u orientaciones sean distintas. Tanto la forma como el tamaño son características que están determinadas por los ángulos y medidas de los lados que pueden tener las figuras relacionadas. De esta forma, al superponer dos figuras que son congruentes, deberían calzar perfectamente.

En general la congruencia entre dos figuras A y B se representa por medio del símbolo $\cong$ de la siguiente forma $A \cong B$. En base a lo anterior, podemos decir lo siguiente:

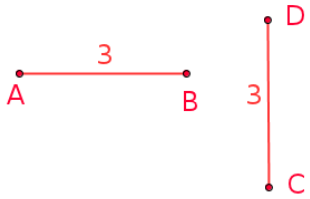
- Cualquier par de puntos distintos son congruentes entre sí.

$$A \cong B \cong C$$



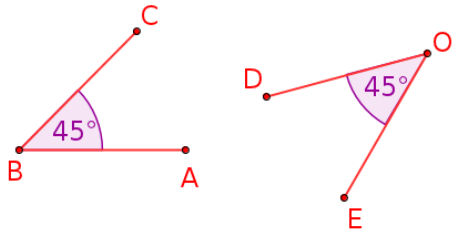
- Dos segmentos son congruentes sí y sólo sí tienen la misma medida.

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$



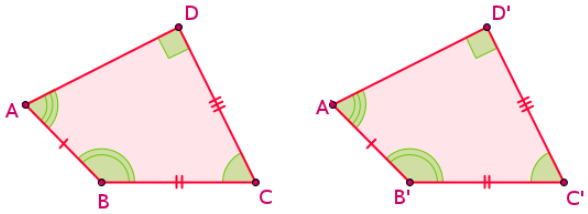
- Dos ángulos son congruentes sí y sólo sí tienen la misma abertura.

$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DOE$$



- Dos figura son congruentes sí y sólo si tienen la misma medida de los lados y ángulos correspondientes.

$$ABCD \cong A'B'C'D'$$

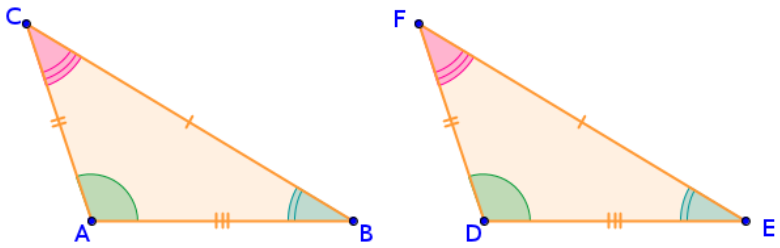


2. Congruencia de triángulos

Como vimos anteriormente para que dos figuras sean congruentes todos sus elementos deben coincidir de manera exacta. En el caso de los triángulos, estos serán congruentes si es que existe una correspondencia entre sus vértices, lados y ángulos.

Dos triángulos son congruentes sí y sólo sí sus ángulos miden lo mismo y sus lados miden lo mismo.

Así, si tenemos que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ entonces se cumplen lo siguiente:



- Con respecto a los vértices tenemos los siguientes pares de elementos que son homólogos o correspondientes entre sí:

$$A \text{ con } D$$
$$B \text{ con } E$$
$$C \text{ con } F$$

- Con respecto a los lados de los triángulos tenemos las siguientes pares homólogos, es decir, con igual medida:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$
$$\overline{CA} \cong \overline{FD}$$

- Con respecto a los ángulos interiores de los triángulos tenemos los siguientes pares de elementos homólogos entre sí:

$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$$
$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$$
$$\measuredangle BCA \cong \measuredangle EFD$$

2.1. Criterios de congruencia de triángulos

A continuación enunciaremos una serie de criterios de congruencia de triángulos que nos sirven para establecer que dos triángulos son congruentes sin la necesidad de comprobar el cumplimiento de todas las condiciones antes dadas por la definición.

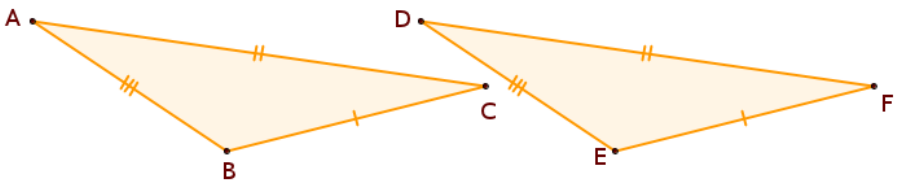
2.1.1. Criterio lado-lado-lado

Euclides en su libro los elementos enunció el siguiente criterio:

Si dos triángulos tienen los dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tienen también la base igual a la base, entonces también tendrán los ángulos iguales a aquellos que están contenidos por los lados iguales.

Lo anterior descrito corresponde al criterio de congruencia conocido como lado-lado-lado o abreviado como L.L.L el cual nos dice que si los tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$
$$\overline{CA} \cong \overline{FD}$$



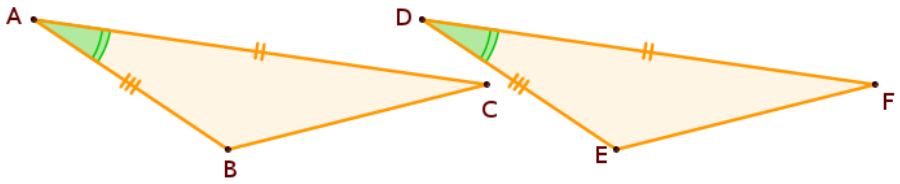
2.1.2. Criterio lado-ángulo-lado

Euclides en su libro los elementos enunció el siguiente criterio:

Si dos triángulos tienen dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tienen iguales los ángulos contenidos por los lados iguales, entonces también tienen la base igual a la base, el triángulo igual al triángulo, y los ángulos restantes iguales a los ángulos restantes respectivamente, a saber aquellos opuestos a los lados iguales.

Lo anterior descrito corresponde al criterio de congruencia conocido como lado-ángulo-lado o abreviado como L.A.L. Este criterio nos dice que si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre estos son respectivamente iguales a otros dos lados y ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$
$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$$
$$\overline{CA} \cong \overline{FD}$$



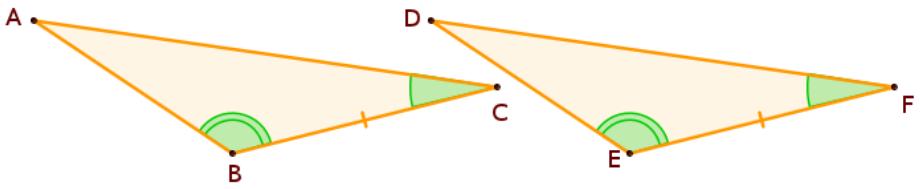
2.1.3. Criterio ángulo-lado-ángulo

Euclides en su libro los elementos enunció el siguiente criterio:

> *Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente, y un lado igual a un lado, a saber, el lado adyacente a los ángulos iguales o aquel que subtiende uno de los ángulos iguales, entonces también tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante igual al ángulo restante.*

Lo anterior descrito corresponde al criterio de congruencia conocido como ángulo-lado-ángulo o abreviado como A.L.A. Este criterio nos dice que si dos triángulos tienen dos ángulos de uno respectivamente iguales a dos ángulos del otro y un lado de uno igual a un lado del otro, a saber, el lado adyacente a los ángulos iguales, entonces los dos triángulos son congruentes.

$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$
$$\measuredangle BCA \cong \measuredangle EFD$$

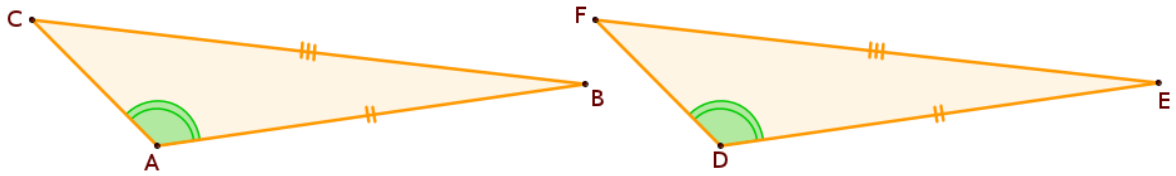


2.1.4. Criterio lado-lado-ángulo

Si bien este criterio no fue enunciado explícitamente por Euclides, se puede deducir a partir de los tres criterios anteriores. Este criterio de congruencia conocido como lado-lado-ángulo o abreviado como L.L.A

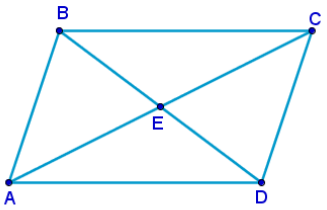
nos dice que si dos lados de un triángulo son respectivamente iguales a los dos lados de otro y los ángulos opuestos al lado mayor de los triángulos también lo son, entonces los dos triángulos son congruentes.

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$
$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$$

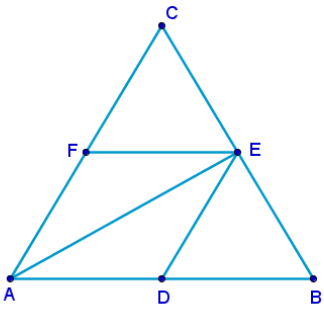


✍ *Ejercicios* 1

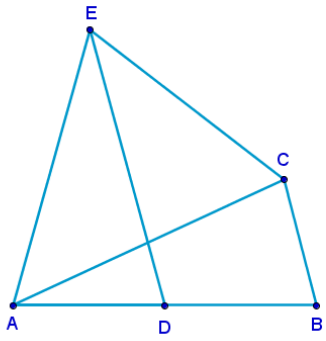
1. *Para cada una de las siguientes figuras determinar todos los triángulos que son congruentes entre sí:*



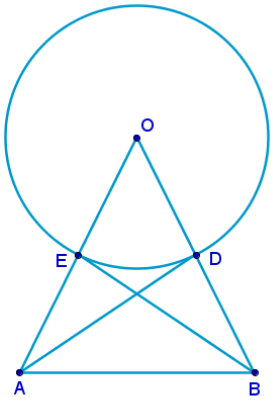
Paralelogramo



$\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$
D, E, F son puntos medios de cada lado



$\triangle ABC$ y $\triangle EAD$ son isósceles congruentes de base $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$



$\triangle ABO$ isósceles de base $\overline{AB}$

O centro de la circunferencia

2. *Demuestre utilizando los criterios de congruencia antes vistos las siguientes afirmaciones.*

   a) Las diagonales de un cuadrado lo dividen en 4 triángulos congruentes.

   b) Al trazar la altura a la base de un triángulo isósceles se forman dos triángulos congruentes.

   c) Al trazar la diagonal de un romboide se forman dos triángulos congruentes.

   d) Al trazar la diagonal mayor de un deltoide se forman dos triángulos congruentes.

   e) En un triángulo isósceles las medianas trazadas a los lados congruentes son congruentes.

   f) En un triángulo isósceles las alturas trazadas a los lados congruentes son congruentes.

Bibliografía

[1] Manual de preparación PSU Matemática, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.

[2] Desarrollo del pensamiento matemático, Polígonos. Triángulos, No 13, *Noviembre 2006*,
Martín Andonegui Zabala.