open green road

Guía Matemática

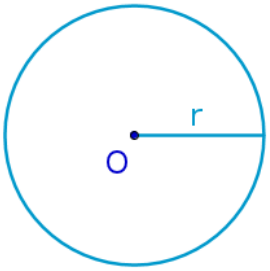
CIRCUNFERENCIA

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

1. Circunferencia

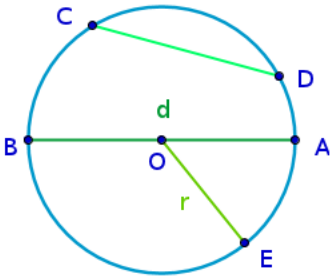
La circunferencia es una figura geométrica plana que se define como el conjunto de puntos que están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro. En la figura el punto O representa el centro de la circunferencia y r la distancia fija a todos los puntos de ésta.



1.1. Elementos de la circunferencia

En una circunferencia podemos distinguir los siguientes elementos:

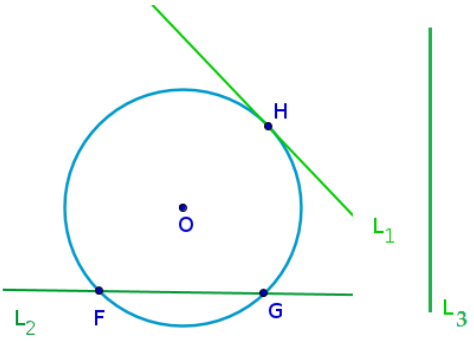
- **Centro:** Es un punto fijo situado al interior de la circunferencia que se encuentra ubicado de manera tal que todos los puntos están a la misma distancia de él. En la figura el punto O es el centro de la circunferencia.
- **Radio:** Es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con su centro. En la figura, los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OE}$ son radios de la circunferencia.
- **Cuerda:** Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. En la figura, los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ son cuerdas.
- **Diámetro:** Es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia y que mide dos veces el radio. En la figura, el segmento $\overline{AB}$ corresponde al diámetro de la circunferencia.



- **Arco:** Es una porción de la circunferencia que está delimitada por dos puntos de ésta. En la figura podemos ver el arco DC que se simboliza como $\overset{\frown}{\text{DC}}$. En general, los arcos se leen en sentido contrario a las manecillas del reloj.

A parte de estos elementos podemos relacionar una circunferencia con las siguientes rectas:

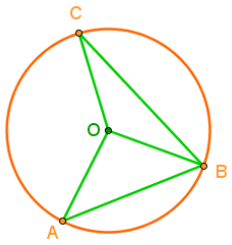
- **Rectas Secantes:** Son las rectas que cortan a la circunferencia en dos puntos. En la figura, la recta L_2 es secante a la circunferencia ya que la intersecta en los puntos F y G.
- **Rectas Tangentes:** Son las rectas que tocan a la circunfenrencia en un sólo punto denominado punto de tangencia. En la figura, la recta L_1 es tangente a la circunferencia ya que la intersecta en un único punto H.
- **Rectas Exteriores:** Son las rectas que no tienen ningún punto en común con la circunferencia. En la figura, la recta L_3 es exterior a la circunferencia.



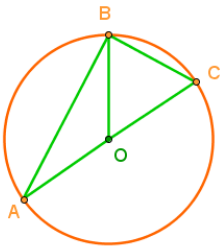
✍ ***Ejercicios*** **1**

Resolver los siguientes ejercicios.

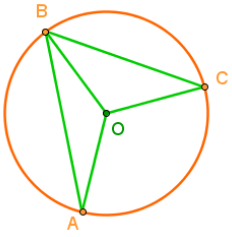
1. En la circunferencia de centro O, el $\measuredangle ABO$ mide 32° y el $\measuredangle OCB$ mide 16°. De acuerdo a lo anterior, ¿cuánto mide el $\measuredangle COA$?



2. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC}$, el $\measuredangle AOB$ mide 114°. De acuerdo a estos datos, ¿cuánto mide el $\measuredangle BCO$?



3. En la circunferencia de centro O si el $\measuredangle OBC$ mide la cuarta parte que el $\measuredangle BOA$ que mide 125°, ¿cuál es el valor de la suma de los ángulos $\measuredangle BAO$ y $\measuredangle AOC$?

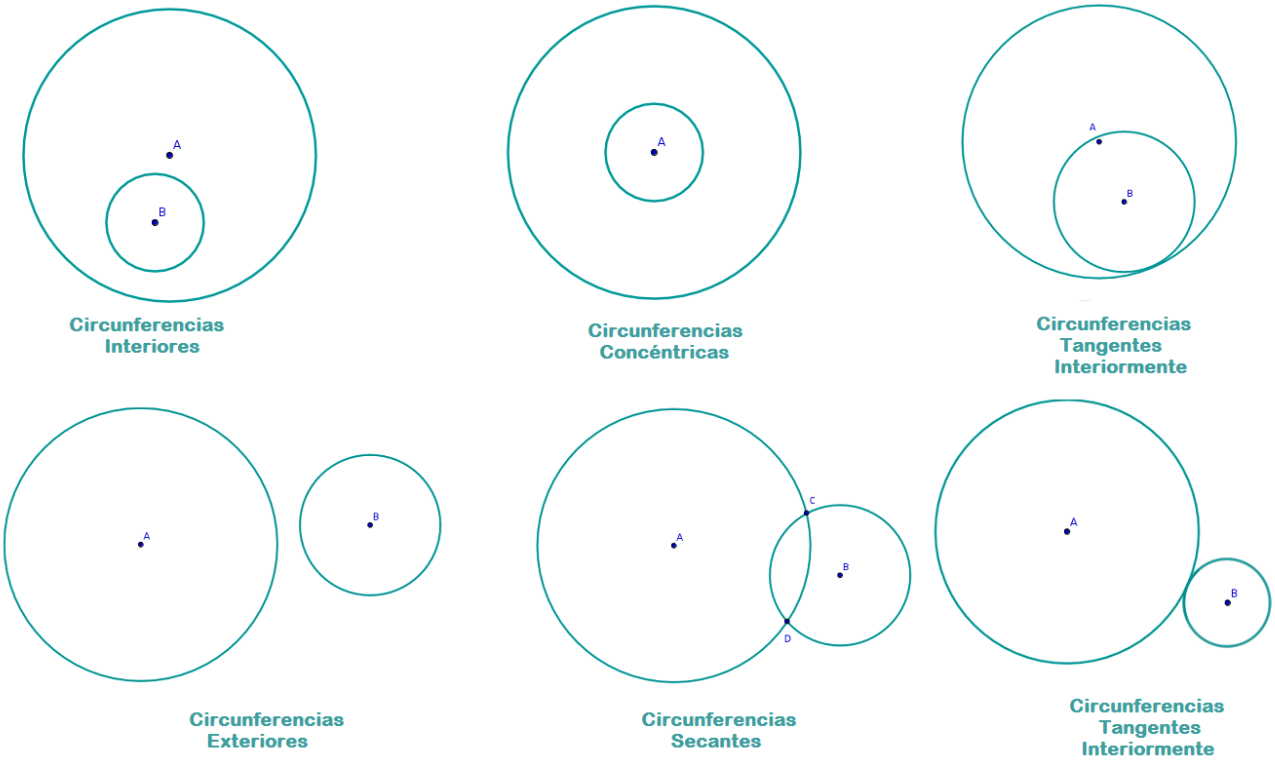


1.2. Posiciones relativas entre dos circunferencias

Cuando estemos trabajando con dos circunferencias se pueden dar las siguiente posiciones relativas entre ellas:

- **Circunferencias Exteriores:** Cuando todos los puntos de una circunferencias son puntos exteriores de la otra, vale decir, no poseen puntos en común.
- **Circunferencias Interiores:** Cuando todos los puntos de una circunferencia están al interior de la otra circunferencia.

- **Circunferencias Concéntricas:** Cuando ambas circunferencias poseen el mismo centro.
- **Circunferencias Secantes:** Cuando las circunferencias tienen dos puntos en común.
- **Circunferencias Tangentes:** Cuando las circunferencias tienen como único elemento en común el punto de tangencia. Esta posición se puede subdividir en:
  - **Circunferencias Tangentes Exteriormente:** Cuando los puntos de una circunferencia están en el exterior de la otra, exceptuando al punto de tangencia.
  - **Circunferencias Tangentes Interiormente:** Cuando los puntos de una circunferencia están en el interior de la otra, exceptuando al punto de tangencia.



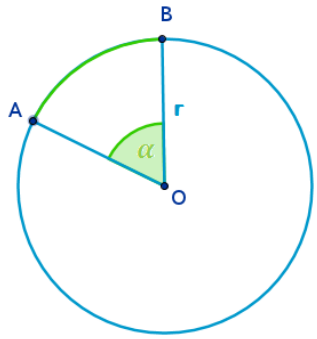
Desafío 1



¿Qué relaciones puedes deducir en cada una de las posiciones relativas vistas entre dos circunferencias a partir de la distancia que hay entre los centros de estas y sus respectivos radios? Respuesta

1.3. Medición de arcos

Para medir el arco de una circunferencia se pueden utilizar dos métodos de acuerdo a la unidad de medida en que quiero expresar mi valor:



1.3.1. Grados sexagesimales

En este caso, la medida angular de un arco es igual a la del ángulo del centro que lo subtiende, por lo cual el valor es independiente de la magnitud que tenga el radio.

$$\overset{\frown}{\text{BA}} = \measuredangle BOA = \alpha$$

1.3.2. Unidad de longitud

En este caso, para expresar la medida de un arco en unidades de longitud como los son los [cm], [m] o [km], debemos utilizar la siguiente proporción:

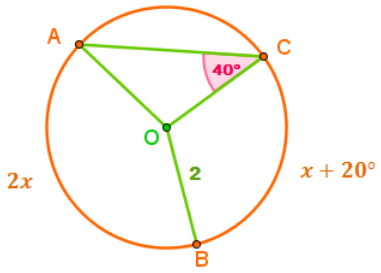
$$\frac{\text{Perímetro de la circunferencia}}{\text{Longitud del arco}} = \frac{360^\circ}{\text{Ángulo que subtiende el arco}}$$

Por lo tanto, la medida del $\overset{\frown}{\text{BA}}$ de la figura superior es:

$$\overset{\frown}{\text{BA}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ}$$

✎ ***Ejemplo***

Determinar el valor del $\overset{\frown}{\text{AB}}$ *formado en la circunferencia de centro* O.



Solución: El triángulo $\triangle AOC$ es isósceles porque dos de sus lados corresponden al radio de la circunferencia de centro O, por lo tanto:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \measuredangle COA + \measuredangle OAC + \measuredangle ACO \\ 180^\circ &= \measuredangle COA + 40^\circ + 40^\circ \\ 100^\circ &= \measuredangle COA \end{aligned}$$

Por lo tanto el $\overset{\frown}{\text{CA}}$ mide 100°. Además, tenemos que la suma de los tres arcos formados en la circunferencia deben ser igual a 360°:

$$\begin{aligned} 360^\circ &= \overset{\frown}{\text{CA}} + \overset{\frown}{\text{AB}} + \overset{\frown}{\text{BC}} \\ 360^\circ &= 100^\circ + 2x + x + 20^\circ \\ 3x &= 360^\circ - 120^\circ \\ 3x &= 240^\circ \\ x &= 80^\circ \end{aligned}$$

Finalmente el $\overset{\frown}{\text{AB}}$ mide $2x = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ$.

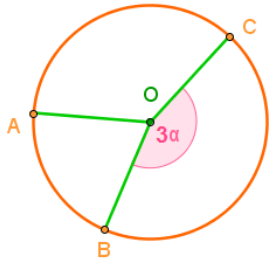
Ahora, si queremos determinar el arco en unidad de longitud, debemos utilizar la expresión antes mostrada:

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{\text{AB}} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \measuredangle AOB}{360^\circ} \\ \overset{\frown}{\text{AB}} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 160^\circ}{360^\circ} \\ \overset{\frown}{\text{AB}} &= \frac{16}{9}\pi \approx 5,6 \end{aligned}$$

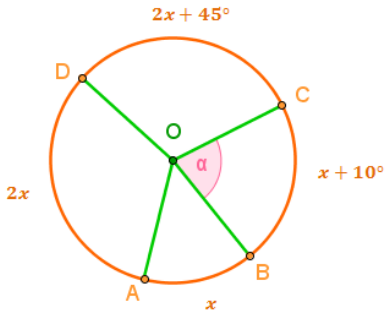
Por lo tanto el $\overset{\frown}{\text{AB}}$ mide $5,6$.

✍ *Ejercicios* 2

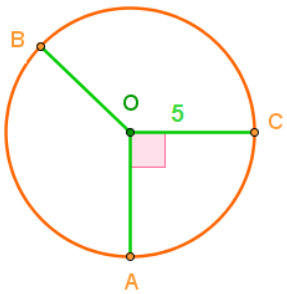
1. *En base a la circunferencia de centro O, determinar la medida del ángulo α sabiendo que $\overset{\frown}{\text{BC}}$ es el triple del $\overset{\frown}{\text{AB}}$ que corresponde a la mitad del $\overset{\frown}{\text{CA}}$.*

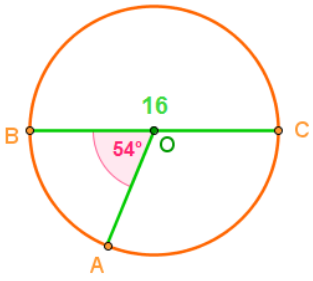


2. *Determina la medida del ángulo α marcado en la circunferencia de centro O en grados sexagesimales.*



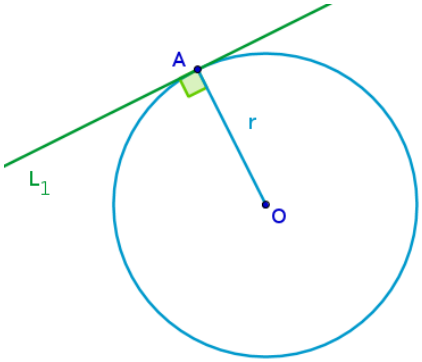
3. *Determinar la medida del $\overset{\frown}{\text{AC}}$ formando en la circunferencia de centro O en unidad de longitud.*





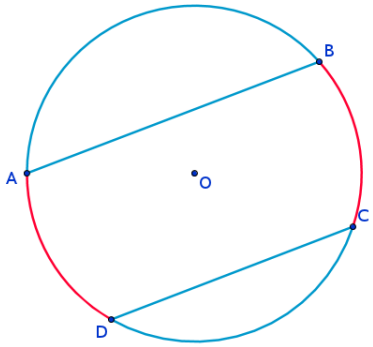
1.4. Relaciones métricas entre los elementos de la circunferencia

- Toda recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.



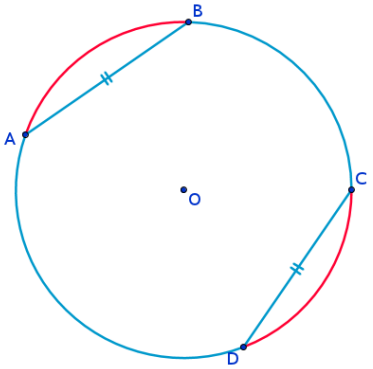
- Dos cuerdas paralelas forman entre ellas arcos congruentes.

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Longrightarrow \overset{\frown}{\mathrm{AD}} \cong \overset{\frown}{\mathrm{CB}}$$



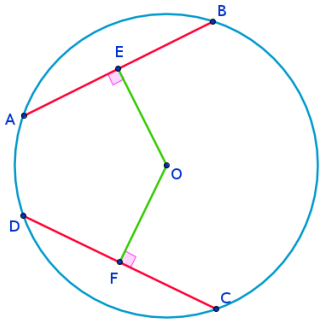
- Dos cuerdas congruentes determinan arcos congruentes y viceversa.

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Longleftrightarrow \overset{\frown}{\mathrm{BA}} \cong \overset{\frown}{\mathrm{DC}}$$



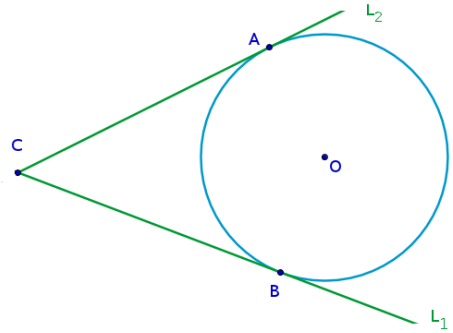
- Dos cuerdas congruentes equidistan del centro de la circunferencia.

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \iff \overline{OE} \cong \overline{OF}$$



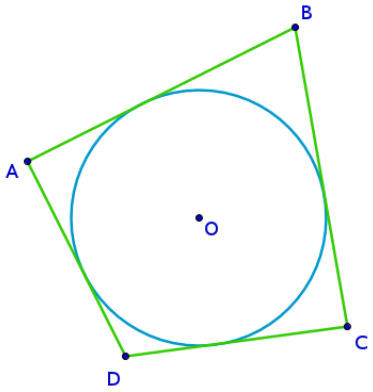
- Dos segmentos tangentes trazados desde un punto exterior a la circunferencia son congruentes.

$$\overline{CA} \cong \overline{CB}$$



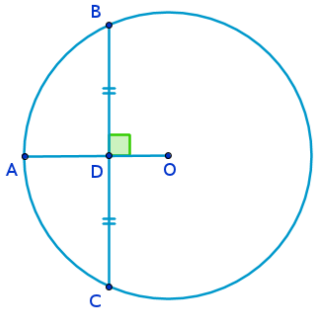
- En todo cuadrilátero circunscrito en un círculo la suma de los lados opuestos son la misma.

$$\overline{AB} + \overline{DC} \cong \overline{AD} + \overline{BC}$$



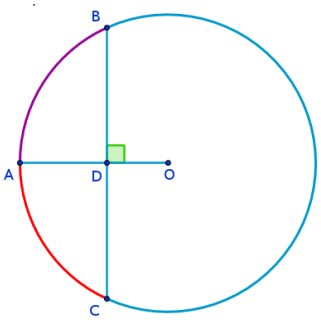
- Si el radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces la divide en dos segmentos de igual medida y viceversa.

$$\overline{AO} \perp \overline{BC} \iff \overline{BD} \cong \overline{DC}$$



- Si el radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces el radio divide al arco que subtiende la cuerda en dos arcos congruentes y viceversa.

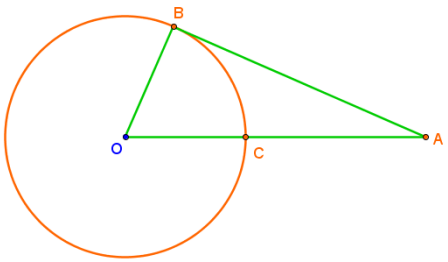
$$\overline{AO} \perp \overline{BC} \iff \overset{\frown}{\mathrm{BA}} \cong \overset{\frown}{\mathrm{AC}}$$



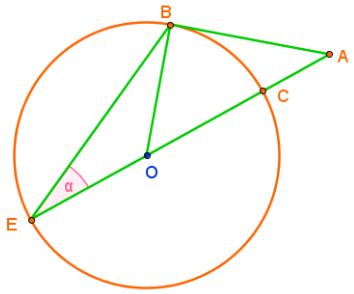
✍ *Ejercicios* 3

Resolver los siguientes ejercicios.

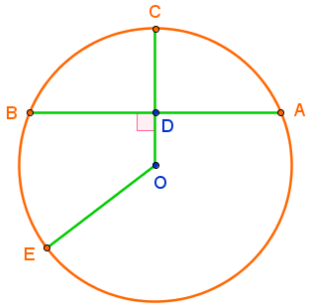
1. En la circunferencia de centro O y radio $5\,[cm]$, el segmento $\overline{CA}$ mide $20\,[cm]$. ¿Cuánto mide $\overline{AB}$?



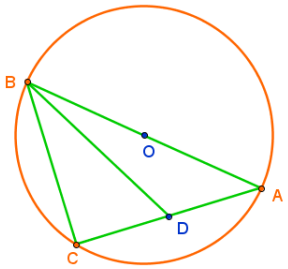
2. En la circunferencia de centro O el ángulo α mide 64°. ¿Cuánto mide el $\measuredangle BAE$?



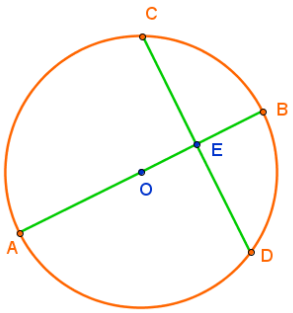
3. El radio de la circunferencia de centro O mide 8$[cm]$. ¿Cuánto mide la cuerda $\overline{AB}$ si el segmento $\overline{OD}$ mide 3$[cm]$?



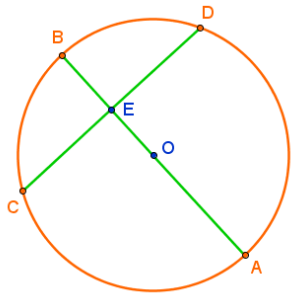
4. En la circunferencia de la figura, el segmento $\overline{AB}$ corresponde a diametro y D al punto medio de $\overline{CA}$. Si se cumple que $\overline{AB} \ : \ \overline{AC} = 10 \ : \ 6$ y que $\overline{DB} = \sqrt{5}$, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia ?



5. En la circunferencia de centro O tenemos que $\overset{\frown}{\mathrm{DB}} \cong \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$. Si $\overline{OA} = 7$ y $\overline{CD} = 10$, ¿cuánto mide $\overline{OE}$?



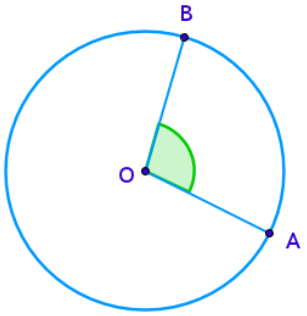
6. En la circunferencia de centro O tenemos que $2\,\overline{OE} = \overline{DE}$. Si $\overline{OB}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{DC}$ que mide 14 $[cm]$. ¿Cuánto mide $\overline{BE}$?



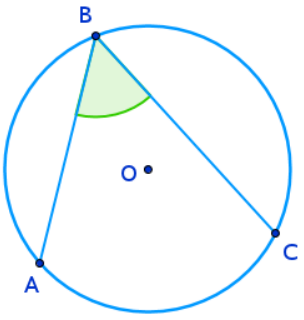
1.5. Ángulos en la circunferencia

En una circunferencia podemos encontrar distintos tipos de ángulos de acuerdo a la posición del vértice y los tipos de rayos que lo componen:

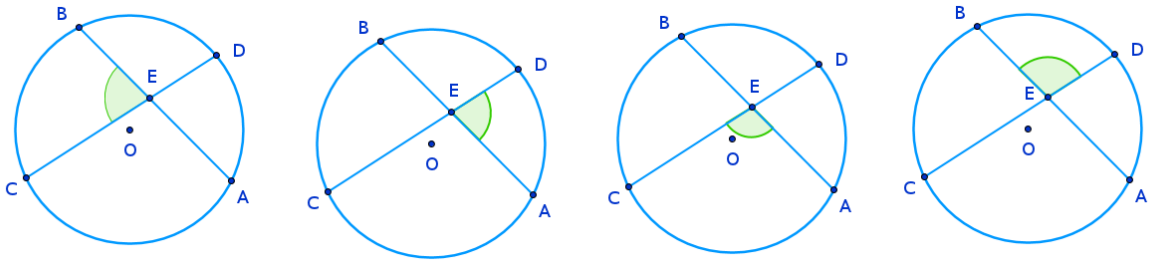
- **Ángulo del Centro:** Se llaman así a los ángulos que tienen su vértice en el centro de la circunferencia. Por ejemplo, el $\measuredangle AOB$ de la figura adjunta.



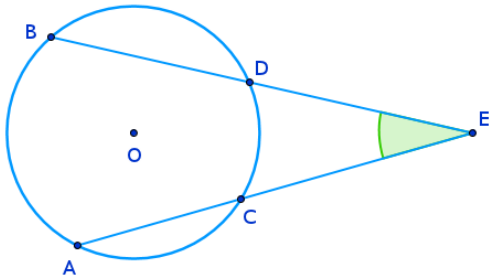
- **Ángulo Inscrito:** Se llaman así a los ángulos que tienen su vértice en la circunferencia. Por ejemplo, el $\measuredangle ABC$ de la figura adjunta.



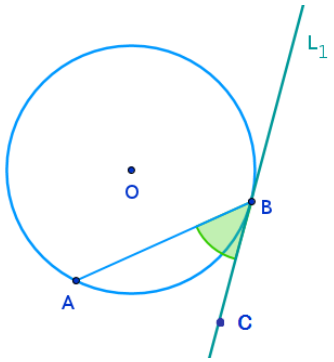
- **Ángulo Interior:** Se llaman así a los ángulos que se forman a partir de la intersección de dos cuerdas distintas. Por ejemplo, los ángulos $\measuredangle BEC$, $\measuredangle AED$, $\measuredangle CEA$ y $\measuredangle DEB$ de la figura adjunta.



- **Ángulo Exterior:** Se llaman así a los ángulos cuyos vértices son un punto exterior de la circunferencia y sus rayos son rectas secantes o tangentes a ésta. Por ejemplo, el $\measuredangle BEA$ de la figura adjunta.



- **Ángulo Semi-inscrito:** Se llaman así a los ángulos que tienen sus vértices en la circunferencia y sus rayos son una tangente y una cuerda. Por ejemplo, el $\measuredangle ABC$ de la figura adjunta.

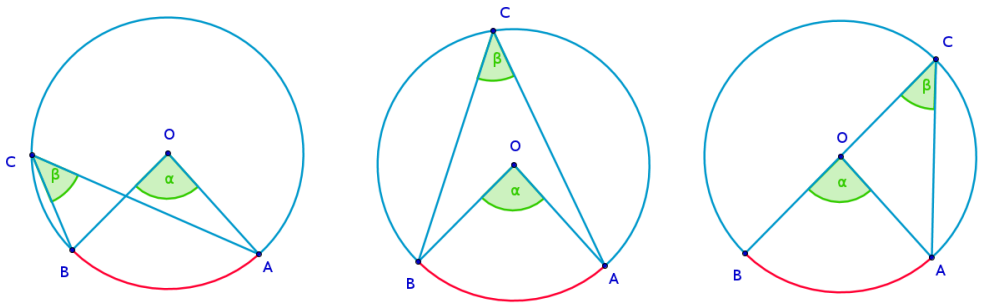


1.6. Medidas de los ángulos en la circunferencia

A continuación estudiaremos algunos teoremas referentes a las medidas que pueden tener los ángulos mostrados anteriormente:

- Todo ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

$$\frac{\alpha}{2} = \beta$$



Demostración: Esta demostración la haremos a partir de la primera circunferencia que se muestra en la figura superior. A lo que deseamos llegar es que el ángulo del centro $\measuredangle BOA = \alpha$ es igual al doble del ángulo inscrito $\measuredangle BCA = \beta$. Para demostrar esto, trazamos el segmento $\overline{CO}$ y analizamos las relaciones que se dan entre los ángulos de dos triángulos.

- Observando el $\triangle COA$ tenemos que $\measuredangle OCA = \measuredangle OAC = \gamma$ porque el triángulo es isósceles. Luego, recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, tenemos:

$$\measuredangle COB = 180° - (2\gamma + \alpha)$$

- Observando el $\triangle COB$ tenemos que $\measuredangle OBC = \measuredangle OCB = \gamma + \beta$ debido a que el triángulo es isósceles. Nuevamente recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, tenemos:

$$\measuredangle COB = 180° - 2(\beta + \gamma)$$

Comparando las expresiones obtenidas para la medida del $\measuredangle COB$ tenemos finalmente que:

$$\begin{aligned} 180° - (2\gamma + \alpha) &= 180° - 2(\beta + \gamma) \\ 180° - 2\gamma - \alpha &= 180° - 2\beta - 2\gamma \\ \alpha &= 2\beta \end{aligned}$$

Desafío 2

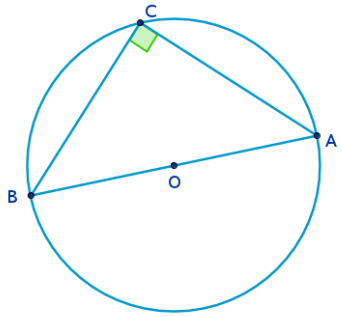


Realiza la demostración de este teorema para las otras dos posiciones que puede tener el ángulo inscrito de acuerdo a la figura anterior.

Respuesta

- Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

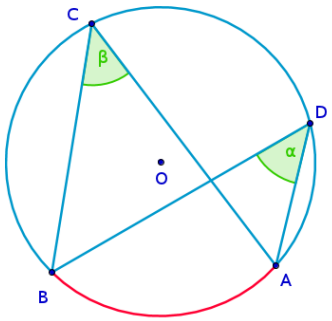
$$\measuredangle BCA = 90°$$



Demostración: Este teorema es una consecuencia directa del anterior. Tenemos que el $\measuredangle BOA$ mide $180°$ por ser $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia. Además, el ángulo BCA inscrito en la circunferencia mide la mitad del ángulo BOA por el teorema anterior, por lo tanto, el $\measuredangle BCA = 90°$.

- Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden el mismo arco miden lo mismo.

$$\alpha = \beta$$

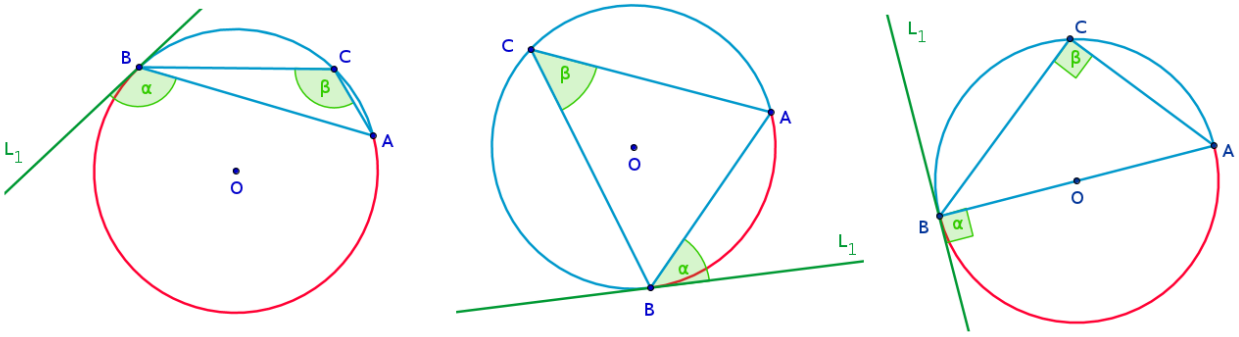


Demostración: En base a la figura superior, al unir por puntos B y A con el centro de la circunferencia se forma el ángulo del centro $\measuredangle BOA$ que subtiende al $\overset{\frown}{\text{BA}}$. Como los dos ángulos inscritos subtienden el mismo $\overset{\frown}{\text{BA}}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\measuredangle BOA &= 2\measuredangle BCA \\
\measuredangle BOA &= 2\measuredangle BDA \\
\measuredangle BCA &= \measuredangle BDA \\
\beta &= \alpha
\end{aligned}$$

- Todo ángulo seminscrito mide lo mismo que otro ángulo inscrito que subtiende el mismo arco.

$$\alpha = \beta$$



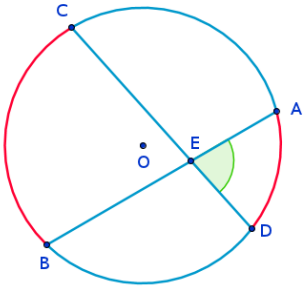
Demostración: En base a la primera circunferencia que se muestra la figura superior, trazamos los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$. Luego, recordando que toda recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia, el $\measuredangle OBA = \alpha - 90°$.

Al observar el $\triangle AOB$ tenemos que $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = \alpha - 90°$ por ser un triángulo isósceles. Además el $\measuredangle BOA = 360° - 2\beta$ ya que es un ángulo del centro que subtiende al $\overset{\frown}{\text{AB}}$, como los ángulos interiores de un triángulo suman 180° tenemos finalmente que:

$$\begin{aligned} 180° &= \measuredangle OAB + \measuredangle OBA + \measuredangle BOA \\ 180° &= \alpha - 90° + \alpha - 90° + 360° - 2\beta \\ 180° + 90° + 90° - 360° &= 2\alpha - 2\beta \\ 2\alpha &= 2\beta \\ \alpha &= \beta \end{aligned}$$

- Todo ángulo interior es igual a la semisuma de las medidas de los arcos que comprenden sus lados y sus prolongaciones.

$$\measuredangle DEA = \frac{\overset{\frown}{\text{CB}} + \overset{\frown}{\text{DA}}}{2}$$



Demostración: En base a la figura superior, unimos los puntos B con D para formar el segmento $\overline{BD}$. Basándonos en el $\triangle BDE$ tenemos que:

$\measuredangle CDB = \dfrac{\overset{\frown}{\text{CB}}}{2}$ (ya que miden la mitad del ángulo del centro que subtiende al mismo arco CB.)

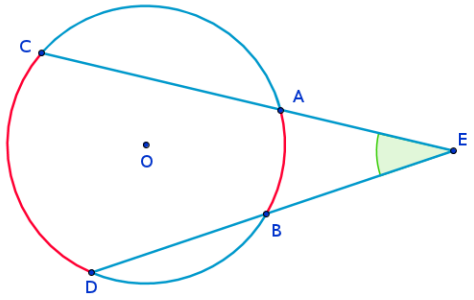
$\measuredangle DBA = \dfrac{\overset{\frown}{\text{DA}}}{2}$ (ya que miden la mitad del ángulo del centro que subtiende al mismo arco DA.)

Además el $\measuredangle DEA = \measuredangle CDB + \measuredangle DBA$ ya que corresponde a uno de los ángulos exteriores del $\triangle BDE$, por lo tanto:

$$\measuredangle DEA = \measuredangle CDB + \measuredangle DBA$$
$$\measuredangle DEA = \frac{\overset{\frown}{\text{CB}}}{2} + \frac{\overset{\frown}{\text{DA}}}{2}$$
$$\measuredangle DEA = \frac{\overset{\frown}{\text{CB}} + \overset{\frown}{\text{DA}}}{2}$$

- Todo ángulo exterior es igual a la semidiferencia de los arcos que comprenden sus lados.

$$\measuredangle CED = \frac{\overset{\frown}{\text{CD}} - \overset{\frown}{\text{BA}}}{2}$$



Demostración: En base a la figura superior, unimos los puntos A con D para formar el segmento $\overline{AD}$. Al observar los ángulos formados tenemos que:

$\measuredangle ADE = \dfrac{\overset{\frown}{\text{BA}}}{2}$ (ya que miden la mitad del ángulo del centro que subtiende al mismo arco BA.)

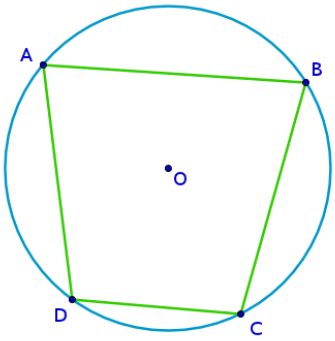
$\measuredangle CAD = \dfrac{\overset{\frown}{\text{CD}}}{2}$ (ya que miden la mitad del ángulo del centro que subtiende al mismo arco CD.)

Además el $\measuredangle CAD = \measuredangle ADE + \measuredangle AED$ ya que corresponde a uno de los ángulos exteriores del $\triangle ADE$, por lo tanto:

$$\measuredangle CAD = \measuredangle ADE + \measuredangle AED$$
$$\measuredangle AED = \measuredangle CAD - \measuredangle ADE$$
$$\measuredangle AED = \frac{\overset{\frown}{\text{CD}}}{2} - \frac{\overset{\frown}{\text{BA}}}{2}$$
$$\measuredangle AED = \frac{\overset{\frown}{\text{CD}} - \overset{\frown}{\text{BA}}}{2}$$

- En todos los cuadriláteros inscritos en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios.

$\measuredangle CDA + \measuredangle ABC = 180°$ $\measuredangle BCD + \measuredangle DAB = 180°$



Desafío 3

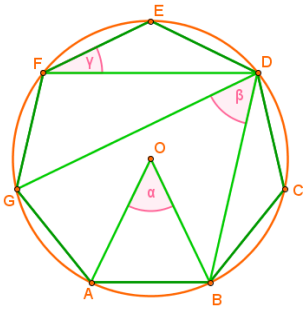


Realiza la demostración del teorema a partir de las propiedades antes vistas.
Respuesta

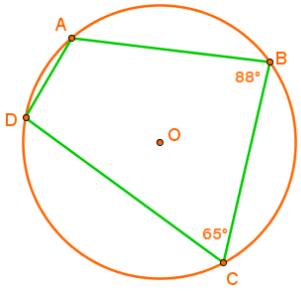
✍ *Ejercicios* 4

Resolver los siguientes ejercicios relacionados con la circunferencia de centro O.

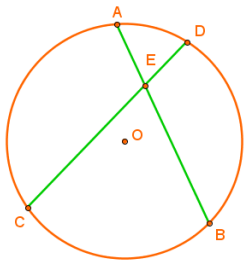
1. Si el polígono regular de la figura está inscrito en la circunferencia, ¿cuánto miden los ángulos α, β y γ?



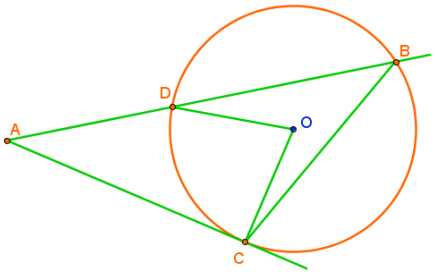
2. ¿Cuánto mide $\measuredangle DAB$ y $\measuredangle CDA$?



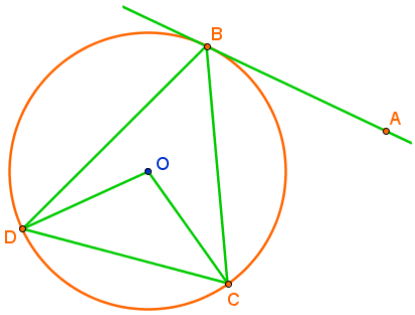
3. Si $\overset{\frown}{AC}= 146°$ y el $\measuredangle DEB = 105°$, ¿cuánto mide $\overset{\frown}{BD}$?



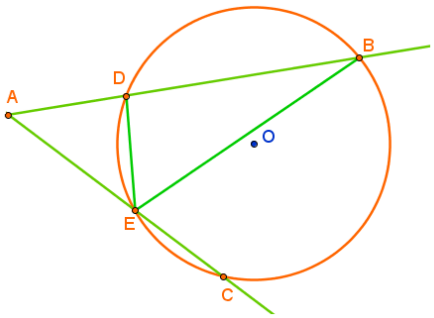
4. Si $\overline{AC}$ es tangente a la circunferencia en C, $\measuredangle ABC = 40°$ y $\measuredangle ADO = 153°$, ¿cuánto mide el $\measuredangle BAC$?



5. En la figura $\measuredangle BDO$ mide la mitad del $\measuredangle DBC$ y el $\measuredangle OCD = 37°$. ¿Cuánto mide el suplemento del $\measuredangle ABC$?



6. En la figura el $\measuredangle BEC = 72°$, $\measuredangle DEB = 45°$ y el $\overset{\frown}{EC}= 53°$. ¿Cuánto mide $\measuredangle BAC$?



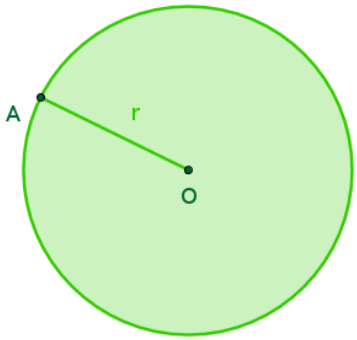
2. Círculo

Euclides en "El libro I de los elementos", define al círculo de la siguiente manera:

> ***Círculo*** *es una figura plana comprendida por una sola línea, que se llama circunferencia, respecto de la cual las rectas que sobre ella inciden desde uno de los puntos colocado en el interior de la figura son iguales entre sí. Tal punto es llamado el centro del círculo.*

De acuerdo a lo anterior, podemos entender al círculo como la región del plano que está contenida dentro de una circunferencia, por lo tanto corresponde a una superficie y no solo a una longitud como la figura antes vista.

Al igual que en la circunferencia, un círculo se puede definir a través de su centro (O) y de su radio ($\overline{OA} = r$) tal como se muestra a continuación:



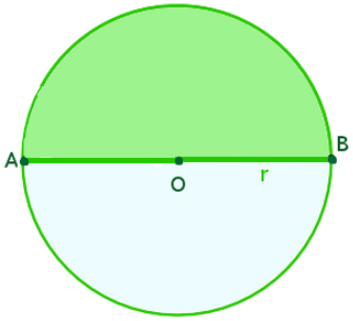
2.1. Figuras relacionadas con el círculo

A continuación estudiaremos tres tipos de figuras que se obtienen a partir de un círculo, para ello necesitamos definir previamente el área A de un círculo:

> *El* ***área*** *de un círculo corresponde a la medida de la superficie limitada por la circunferencia perimetral del círculo dado. La expresión matemática para calcularla está dada por:*
>
> $$A = \pi \cdot r^2$$
>
> *donde r es el radio del círculo.*

2.1.1. Semicírculo

Es la región del círculo delimitada por su diámetro y por su arco correspondiente.

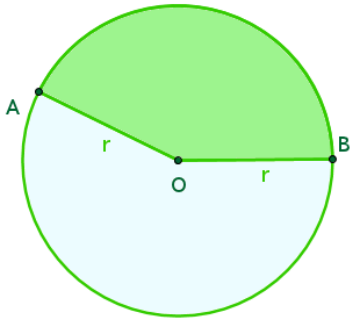


Para obtener el área de un semicírculo basta con dividir el área del círculo completo por la mitad. Así, si tenemos un círculo de radio r el área del semicírculo es:

$$\text{Área del semicírculo } = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$$

2.1.2. Sector Circular

Es la región del círculo delimitada por dos radios y por el arco que los subtienden.



Para obtener el área de un sector circular debemos utilizar la siguiente proporción:

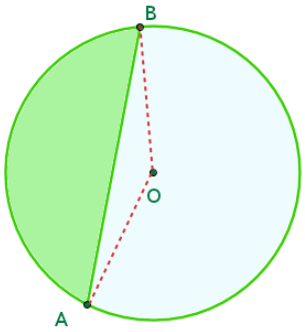
$$\frac{\text{Área del círculo}}{\text{Área del sector circular}} = \frac{360°}{\text{Ángulo del centro}}$$

Por lo tanto si tenemos un círculo de radio r y un sector circular cuyo ángulo del centro es α, entonces el área del sector circular es:

$$\text{Área del sector circular } = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°}$$

2.1.3. Segmento Circular

Es la región del círculo delimitada por una cuerda y por su arco correspondiente.



Para obtener el área de un segmento circular debemos calcular el área del sector circular que lo contiene y restarle el área del triángulo que se forma entre la cuerda y los radios del sector circular.

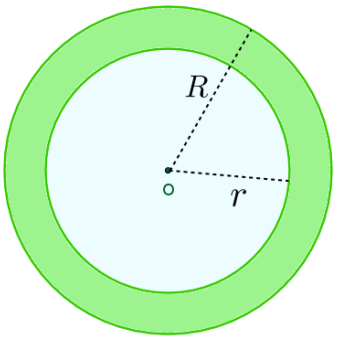
$$\text{Área del segmento circular} = \text{Área del sector círcular} - \text{Área del triángulo}$$

En base a la figura, si el círculo tiene radio r, tenemos:

$$\text{Área del segmento circular } = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \measuredangle AOB}{360^\circ} - A_{\triangle \text{AOB}}$$

2.1.4. Corona Circular

Es la región determinada por dos circunferencias concéntricas.



Para obtener el área de una corona circular debemos calcular la diferencia entre las áreas de los dos círculos concéntricos:

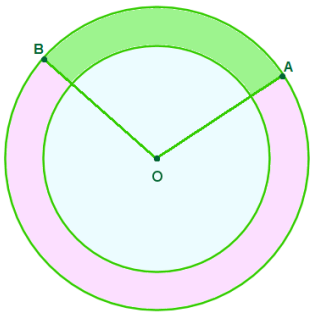
$$\text{Área de la corona circular} = \text{Área del círculo mayor} - \text{Área del círculo menor}$$

De esta manera, si el círculo mayor tiene radio R y el círculo menos tiene radio r, entonces:

$$\text{Área de la corona circular} = \pi(R^2 - r^2)$$

2.1.5. Trapecio Circular

Es la región que corresponde a cortan por dos radios una corona circular.



Desafío 4

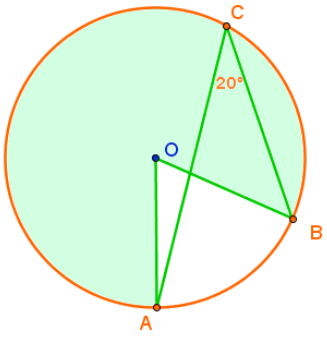


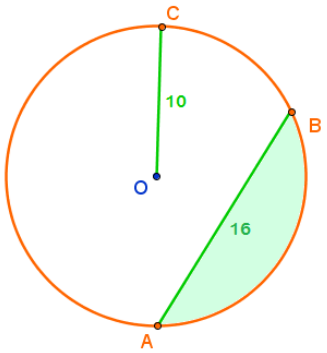
¿Cómo calcularías el área de un trapecio circular?

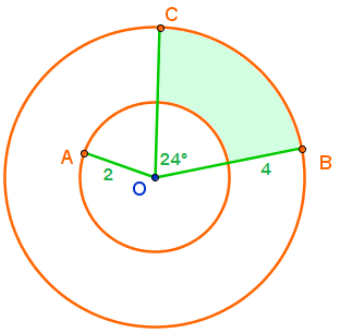
Respuesta

Ejercicios ***4***

Calcula el área de las siguientes figuras relacionadas con el círculo de centro O.





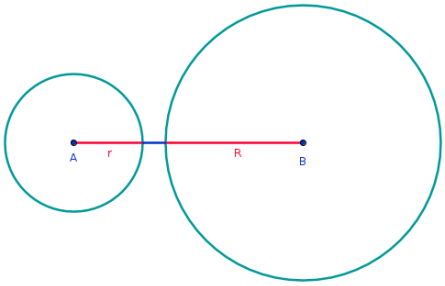


Desafíos resueltos

✓ Desafío I: Vamos a ir deduciendo relaciones a partir de cada posición relativa vista entre dos circunferencias:

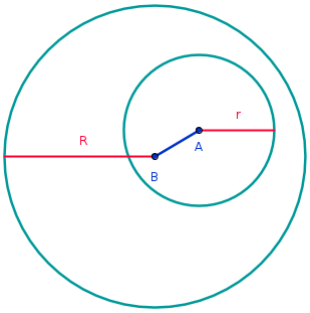
- Al tener dos **circunferencias exteriores** podemos decir que la distancia que separa los centro de las dos circunferencias es mayor que la suma de los radios respectivos de cada circunferencia.

$$\overline{AB} > R + r$$

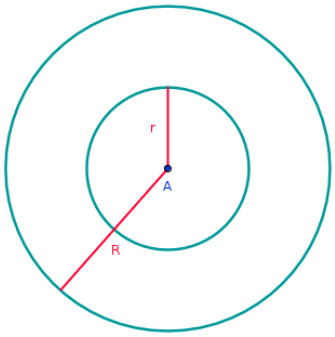


- Al tener dos **circunferencias interiores** podemos decir que la distancia que separa los centro de las dos circunferencias es menor que la diferencia del radio mayor con el radio menor de las circunferencias.

$$\overline{AB} < R - r$$

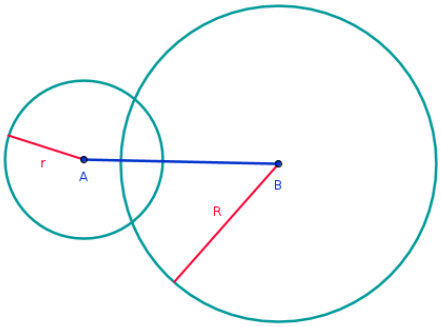


- Al tener dos **circunferencias concéntricas** podemos decir que la distancia que separa los centros de éstas es nula, ya que poseen el mismo centro.



- Al tener dos **circunferencias secantes** podemos decir que la distancia que separa los centros de las dos circunferencias es menor que la suma y mayor que la diferencia entre los radios respectivos.

$$\overline{AB} > R - r \quad \text{y} \quad \overline{AB} < R + r$$

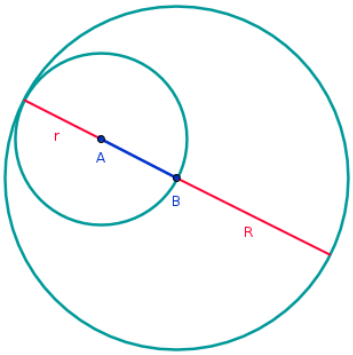


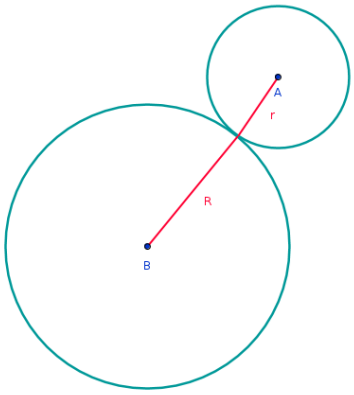
- Al tener dos **circunferencias tangentes interiormente** podemos decir que la distancia que separa los centros de las circunferencias es igual a la diferencia entre los radios respectivos.

$$\overline{AB} = R - r$$

Y al tener dos **circunferencias tangentes exteriormente** podemos decir que la distancia que separa los centros de las circunferencias es igual a la suma de los radios respectivos.

$$\overline{AB} = R + r$$



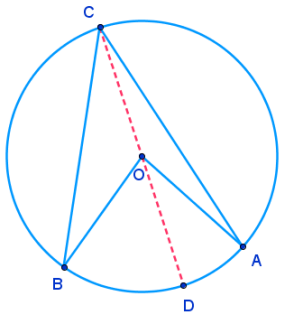


Volver

✓ Desafío II:

- De acuerdo a la figura, al trazar el segmento $\overline{CO}$ se forman dos triángulos que cumplen ciertas relaciones:

- En el $\triangle COB$ se cumple que $\measuredangle OCB = \measuredangle CBO = \alpha$ por ser triángulo isósceles y el $\measuredangle BOD = 2\alpha$ por ser ángulo exterior del mismo triángulo.
- En el $\triangle COA$ se cumple que $\measuredangle OCA = \measuredangle CAO = \beta$ por ser triángulo isósceles y el $\measuredangle AOD = 2\beta$ por ser el ángulo exterior del mismo triángulo.



En base a lo anterior:

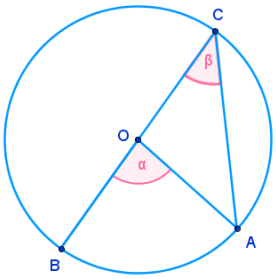
$$\measuredangle BOA = 2\alpha + 2\beta$$
$$\measuredangle BOA = 2(\alpha + \beta)$$
$$\measuredangle BOA = 2(\measuredangle BCA)$$

- De acuerdo a la figura, el $\triangle COA$ es isósceles, por lo tanto:

$$\measuredangle OCA = \measuredangle CAO = \beta$$

Además, el $\measuredangle BOA = 2\beta$ ya que es ángulo exterior del vértice O del mismo triángulo, luego:

$$\alpha = 2\beta$$



Volver

✓ Desafío III: El $\measuredangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{\text{AC}}}{2}$, ya que corresponde a la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco, por otro lado el $\measuredangle ADC = \dfrac{\overset{\frown}{\text{CA}}}{2}$ (por la misma razón anterior). Finalmente tenemos que:

$$\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = \frac{\overset{\frown}{\text{AC}}}{2} + \frac{\overset{\frown}{\text{CA}}}{2}$$
$$\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = \frac{\overset{\frown}{\text{AC}} + \overset{\frown}{\text{CA}}}{2}$$
$$\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = \frac{360^\circ}{2}$$
$$\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = 180^\circ$$

Para la otra afirmación se procede de forma análoga. Volver

✓ Desafío IV: Para obtener el área de un trapecio circular debemos utilizar la siguiente proporción:

$$\frac{\text{Área de la corona circular}}{\text{Área del trapecio circular}} = \frac{360^\circ}{\text{Ángulo del centro}}$$

Por lo tanto, si tenemos dos círculos concentricos de radio mayor R y radio menor r, y un trapecio circular cuyo ángulo del centro es α, entonces el área del trapecio circular es:

$$\text{Área del trapecio circular} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \alpha}{360^\circ}$$

Volver

Bibliografía

[1] Manual de preparación PSU Matemática, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.

[2] Desarrollo del pensamiento matemático, La circunferencia y el círculo, No 15, *Marzo 2007*,
Martín Andonegui Zabala.