open green road

Guía Matemática

INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Interés

Es un concepto que se usa casi exclusivamente en el sector financiero, corresponde a un índice que describe la rentabilidad de un ahorro o el sobreprecio de un préstamo. Generalmente dicho índice i se expresa en porcentaje, el cual se aplica a una cantidad de dinero inicial que llamamos **capital inicial** C_i en base a un período de tiempo determinado. De esta manera hablaremos de intereses anuales, mensuales, diarios, etc. dependiendo del período de tiempo que debe transcurrir para que se aplique dicho interés i sobre el capital inicial C_i. Si el interés sólo se aplica sobre el dinero inicial, diremos que dicho interés es **simple**; pero si el capital sobre el que se aplica el interés es igual al capital anterior más los intereses ganados, entonces estamos hablando de un interés **compuesto**.

1.1. Interés simple

Es un interés que se aplica sólo sobre el capital inicial sin que el dinero ganado por dicho interés sea capitalizado en un nuevo período. Esto quiere decir que el interés simple se aplica siempre sobre el capital inicial C_i el cual no varía en el tiempo.

La ganancia G obtenida en n periodos dados por un interés simple de un $i\,\%$ sobre un capital inicial C es igual a:

$$\boxed{G = niC}$$

Es muy importante que los periodos n y el interés i estén expresados en la misma temporalidad, es decir, si hablamos de interés anual, entonces n debe expresar periodos anuales; si i es un interés simple mensual, entonces n debe expresar periodos mensuales.

Cabe notar que como el interés está representando un porcentaje, debemos escribirlo en su forma decimal o fraccionaria para operar. Por ejemplo, si el interés es de un $30\,\%$ anual entonces

$$i = 30\,\% \text{ anual } = \frac{30}{100} = 0,3$$

Si lo queremos expresar como un interés mensual, debemos dividir por 12, ya que un mes es $\frac{1}{12}$ de un año.

$$30\,\% \text{ anual} = \frac{1}{12}30\,\% \text{ mensual} = \frac{1}{12} \cdot \frac{30}{100} = \frac{1}{40} = 0,025 = 2,5\,\% \text{ mensual}$$

✎ ***Ejemplo***

1. *Si solicito \$500.000 a un prestamista con en 24 cuotas mensuales con un interés simple de 1 % mensual, ¿Cuánto terminaré pagando por el prestamo?*

   Solución: La ganancia para el prestamista será igual a

   $$G = niC$$

   donde $n = 24$ porque son 24 períodos de 1 mes en donde se aplicará el interés, $i = 1\,\% = \dfrac{1}{100}$ y $C =$ \$500.000

   $$\begin{aligned} G &= 24 \cdot \frac{1}{100} \cdot 500.000 \\ &= \$120.000 \end{aligned}$$

   El prestamista gana \$120.000, por lo tanto terminaré pagando las ganancias G del prestamista más el dinero prestado C, esto es:

   $$C + G = \$500.000 + \$120.000 = \$620.000$$

2. *Si ahorro \$1.000 en una cuenta de ahorro con interés simple de un 12 % anual, ¿cuánto tendré en la cuenta 24 meses después?*

   Solución: Para este caso el capital es C =\$1.000, el interés $i = 12\,\% = \dfrac{12}{100} = \dfrac{3}{25}$ anual. Los 24 meses los transformamos a 2 años para que n y el interés i estén con la misma temporalidad. Transcurridos los 2 años tendré en mi cuenta el capital inicial C más las ganancias G por interés.

$$\begin{aligned} \text{Ahorro} &= C + G \\ &= \$1.000 + niC \\ &= \$1.000 + \$2 \cdot \frac{3}{25} \cdot 1.000 \\ &= \$1.000 + \$240 \\ &= \$1.240 \end{aligned} \tag{1}$$

Recuerda que para hallar la deuda o ahorro total en con interés simple se debe sumar la ganancia por intereses G más el capital inicial C

$$\textit{Ahorro} = C + G = C(1 + ni)$$

1.2. Interés compuesto

Es el tipo de interés que usualmente se aplica en el comercio formal para sobreprecios y préstamos. En este caso los beneficios obtenidos en un período de interés se capitalizan nuevamente para el siguiente período de interés. Llamemos C_0 al capital inicial, i a la tasa de interés, n al período de tiempo en el cual se aplica el interés y C_n a las ganancias totales obtenidas en n períodos.

Para un primer período de capitalización, las ganancias son igual al capital inicial más los intereses:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i$$
$$C_1 = C_0(1 + i)$$

En el segundo período se considerará como capital inicial a la ganancia anterior C_1, entonces las ganancias en el segundo período son:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot i$$

Como $C_1 = C_0(1 + i)$, reescribimos C_2:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + C_1 \cdot i \\ &= C_1(1 + i) \\ &= [C_0(1 + i)](1 + i) \\ &= C_0(1 + i)^2 \end{aligned}$$

Para el tercer período tomamos C_2 como el capital inicial, entonces las ganancias en el tercer período son:

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 + C_2 \cdot i \\ &= C_2(1 + i) \end{aligned}$$

Como $C_2 = C_0(1+i)^2$, entonces nos queda que:

$$\begin{aligned} C_3 &= C_0(1 \cdot i) \\ &= [C_0(1+i)^2](1+i) \\ &= C_0(1+i)^3 \end{aligned}$$

Para un cuarto período tomamos C_3 como el capital inicial, entonces las ganancias en el cuarto período son:

$$\begin{aligned} C_4 &= C_3 + C_3 \cdot i \\ &= C_3(1+i) \end{aligned}$$

Como $C_3 = C_0(1+i)^3$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} C_4 &= C_3(1+i) \\ &= [C_0(1+i)^3](1+i) \\ &= C_0(1+i)^4 \end{aligned}$$

Si ordenamos los resultados obtenidos:

$$\begin{aligned} C_0 &= C_0 \\ C_1 &= C_0(1+i) \\ C_2 &= C_0(1+i)^2 \\ C_3 &= C_0(1+i)^3 \\ C_4 &= C_0(1+i)^4 \end{aligned}$$

Si seguimos la lógica de las expresiones podemos deducir que para n periodos de capitalización con un interés i y un capital inicial C, la ganancia total es:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

✎ ***Ejemplo***

1. *¿Cuál es el ahorro obtenido al depositar \$1.000.000 en una cuenta con una tasa de interés del 10 % anual durante 48 meses?*

   Solución: En este caso $C_0 = \$1.000.000$, $i = 10\,\% = 0,1$ anual y $n = 48$ meses. Como i y n deben estar en la misma temporalidad, reescribimos $n = \dfrac{48}{12} = 4$ años. Sabemos que:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

   Nos preguntan por C_4, entonces:

$$\begin{aligned} C_4 &= C_0(1+i)^4 \\ &= 1.000.000(1+0,1)^4 \\ &= 1.000.000(1,1)^4 \\ &= \$1.464.100 \end{aligned}$$

2. *El precio en efectivo de un ultrabook es de \$750.000. Si al comprarlo en 6 cuotas se le aplica un interés compuesto mensual de 6 %, ¿cuál es la diferencia monetaria entre pagarlo en 6 cuotas y en efectivo?*

   Solución: El costo final en 6 cuotas lo podemos hallar con la expresión:

   $$C_6 = C_0(1+i)^6$$

   donde $i = 6\,\% = 0,06$ y $C_0 =$\$750.000, entonces el precio final a pagar por el ultrabook es:

   $$\begin{aligned} C_6 &= C_0(1+i)^6 \\ &= (1+0,06)^6 \\ &= 750.000(1,06)^6 \\ &= \$1.063.890 \end{aligned}$$

   La diferencia entre el precio en cuotas y en efectivo es:

   $$\$1.063.890 - \$750.000 = \$313.890$$

   Si calculamos qué porcentaje es \$313.890 de \$750.000 obtenemos un 41,85 %, eso quiere decir que al comprarlo en 6 cuotas estamos pagando un %41,85 extra del precio en efectivo.

---

*En una situación con interés compuesto, para obtener la ganancia total **no** debemos sumar a C_n el capital inicial C_0 porque ya está considerado.*

✍ *Ejercicios* **1**

1. ¿Cuál debe ser el capital inicial de un ahorro a tasa de interés simple del 20 % mensual para alcanzar el millón de pesos de intereses en un año?
2. Si se depositan \$2.500 en una cuenta de ahorro con una tasa de interés simple de 0,25 mensual, ¿cuánto se tendrá en la cuenta de ahorro después de 7 meses?
3. Para obtener un ahorro total de \$36.900 en un depósito con interés simple a 7 meses con un capital inicial de \$18.000, ¿cuál debe ser el interés menusal y anual?
4. ¿Cuál es el valor total que se pagaría por un crédito de consumo de \$1.250.000 si tiene un interés compuesto del 6 % y se paga en 36 cuotas mensuales?
5. El arancel de una carrera universitaria cuesta 3 millones con interés del 2 % mensual incluido. Si son 10 cuotas, ¿cuánto cuesta la carrera sin los intereses?

Bibliografía

[1] APUNTES DE ÁLGEBRA I, TOMO I, *Segunda edición 1993*, Facultad de Ciencias, USACH
Antonio Orellana Lobos.

[2] APUNTES ÁLGEBRA, *Edición 2003*, Facultad de Ciencias, USACH
Ricardo Santander Baeza.