open green road

Guía Matemática

PROBABILIDAD CLÁSICA

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

1. Probabilidades



El desarrollo inicial de las probabilidades se asocia a la necesidad de los hombres por conocer los resultados de diversos juegos de azar en donde se apostaban grandes cantidades de dinero. Necesitaban saber por ejemplo, cuán seguro era obtener un número 6 al lanzar un dado 10 veces o cuál era la posibilidad de obtener una suma mayor que 10 al lanzar dos dados, para así saber en qué juego les convenía apostar para ganar la mayor cantidad de dinero.

Las probabilidades, como podemos ver, aparecen en numerosas situaciones de nuestra vida cotidiana. Constantemente analizamos información o experiencias que hemos tenido para saber qué tan probable es que ocurra o no una situación en particular. Por ejemplo, cuando es invierno y vemos el cielo nublado decimos frases como "mañana saldré con parka porque **es probable** que llueva", "**es seguro** que mañana hará frío" o "**es imposible** que mañana hayan 33°C en Santiago", estas expresiones hacen referencia a las probabilidades ya que nos estamos ateniendo a lo que puede ocurrir con mayor seguridad de acuerdo a la información y/o experiencia que manejamos. En base a lo anterior, es que por medio de las probabilidades buscamos disminuir la incertidumbre que poseen distintos eventos.

*Las **probabilidades** sirven para cuantificar la posibilidad de que un suceso ocurra.*

Las probabilidades se representan a través de un número comprendido entre 0 y 1, el cual indica las posibilidades que tiene un determinado suceso de ocurrir entre todos los posibles resultados de un experimento. Estas, además de ser expresadas a través de un número decimal o una fracción comprendida entre 0 y 1, pueden ser representadas por medio de porcentajes. Por ejemplo, si la probabilidad de un suceso es $0,5$ o $\frac{1}{2}$ esto es equivalente a decir que la probabilidad del suceso es de un $50\,\%$, de esta manera las probabilidades pueden estar expresadas, de igual forma, por un número entre $0\,\%$ y $100\,\%$.

1.1. Conceptos previos

1.1.1. Experimento

Un experimento es una acción o proceso que produce un resultado. A continuación describiremos distintos tipos de experimentos:

- **Experimento Determinista**: Consiste en aquellos experimentos que al repetirlos bajo las mismas condiciones iniciales se obtiene siempre el mismo resultado. Debido a lo anterior el experimento tiene un resultado único que se puede predecir sin la necesidad de realizar la acción. Por ejemplo, si medimos el tiempo que demora en caer una bolita de 2[kg] y luego repetimos el experimento con las mismas condiciones iniciales, en ambos casos obtendremos el mismo tiempo de caída.
- **Experimento Aleatorio**: Consiste en aquellos experimentos que al repetirlos bajo las mismas condiciones iniciales no se obtienen siempre los mismos resultados. Debido a lo anterior el experimento tiene múltiples resultados que dependen del azar. Por ejemplo, al lanzar una moneda podemos obtener sello y luego al lanzarla bajo las mismas condiciones podemos obtener cara, es decir, nadie está seguro del resultado.
- **Experimento Equiprobable**: Consiste en aquellos experimentos en los que todos los resultados tienen la misma posibilidad de ocurrir. Por ejemplo, si se lanza un dado común no cargado todas las caras tienen la misma posibilidad de salir.

- **Experimento No Equiprobable**: Consiste en aquellos experimentos en los que algunos de los resultados tienen mayores posibilidades de ocurrir que otros. Por ejemplo, si se desea sacar una ficha de una caja con 20 fichas rojas y 30 fichas azules, todas del mismo porte y peso, hay mayor posibilidad de obtener una ficha azul que una roja.

✍ ***Ejercicios*** **1**

Determinar, en cada uno de los siguientes experimentos, si los resultados son equiprobables o no:

1. Extraer una bolita roja de una urna que contiene 20 bolitas rojas y 20 bolitas blancas, todas del mismo peso, textura y tamaño.
2. Extraer una carta con una *figura* de una baraja española[1].
3. Obtener un número par al lanzar una ruleta divida en 6 partes iguales numeradas del 1 al 6.
4. Llamar al azar a un celular de una lista compuesta por 10 números telefónicos de celulares y 9 números telefónicos de oficinas.
5. Llegar a la meta en un juego de mesa que tiene las siguientes condiciones. Primero los jugadores deben enumerase partiendo del número 1, y luego deben comenzar el juego teniendo en consideración que para avanzar en el tablero la suma de los puntos de dos dados lanzados debe coincidir con el número del jugador.

1.1.2. Espacio Muestral

El espacio muestral lo denotaremos con la letra Ω y corresponde al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Observemos los siguientes espacios muestrales:

- Lanzamiento de una moneda:
$$\Omega_{moneda} = \{cara, sello\}$$
- Lanzamiento de un dado:
$$\Omega_{dado} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Como vemos estos espacios muestrales corresponden a experimentos con un único objeto, ya sea una moneda o un dado, pero ¿cómo serán los espacios muestrales de experimentos con más de un objeto?

- Lanzamiento de dos monedas:
$$\Omega = \{(cara, cara), (cara, sello), (sello, cara), (sello, sello)\}$$
- Lanzamiento de dos dados:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$$
$$(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),$$
$$(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

[1]La baraja española esta compuesta por 4 pintas, cada una de ellas posee 10 cartas de las cuales 7 corresponden a los números del 1 al 7 y 3 corresponden a las *figuras* del rey, del caballo y de la sota.

Como podemos ver los elementos de estos espacios muestrales son pares ordenados, en donde el orden en el que aparecen los resultados es importante, esto quiere decir que elementos como $(cara, sello)$ y $(sello, cara)$ o como $(6, 5)$ y $(5, 6)$ son distintos pese a que poseen los mismos elementos.

✍ ***Ejercicios*** ***2***

Determinar, en cada uno de los siguientes experimentos, el espacio muestral:

1. Extraer tres bolitas de una caja con 10 bolitas celestes y 9 bolitas rosadas.
2. Lanzar cuatro veces una moneda.
3. Responder al azar 2 preguntas que constan de 5 alternativas cada una.
4. Lanzar un dado de 12 caras enumeradas con los primeros números primos.
5. Lanzar un dado tradicional y una moneda.

1.1.3. Evento o Suceso

Un suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto de posibles resultados que pueden resultar de un experimento aleatorio. Se destacan dos tipos de sucesos de acuerdo a la probabilidad que tienen:

- **Suceso Imposible**: Es aquel resultado que tiene probabilidad 0 ó 0 % y que, por lo tanto, nunca ocurre. Por ejemplo, cuando se desea obtener un número mayor que 6 al lanzar un dado común.
- **Suceso Seguro**: Es aquel resultado que tiene probabilidad 1 ó 100 % y que, por lo tanto, siempre ocurre. Por ejemplo, cuando se desea sacar una carta roja de una baraja inglesa que posee sólo cartas de corazón y diamante.

Algunas relaciones que se dan entre dos o más sucesos son:

- **Sucesos Mutuamente Excluyentes**: Son aquellos sucesos que no pueden ocurrir de forma simultánea, por lo tanto, no pueden tener elementos en común. Por ejemplo, si nuestro experimento consiste en lanzar un dado tradicional, un suceso A puede ser "que salga un número par" y un suceso B puede ser "que salga un número impar".
- **Sucesos Independientes**: Son aquellos sucesos donde la ocurrencia de uno no influye en la ocurrencia del otro. Por ejemplo, si nuestro experimento consiste en lanzar un dado común y una moneda, los resultados de ambos experimentos no influyen entre sí, ya que obtener un 6 por ejemplo no influye en que me vaya a salir cara o sello en la moneda.
- **Sucesos Dependientes**: Son aquellos sucesos donde la ocurrencia de uno afecta en la ocurrencia del otro. Por ejemplo, si mi experimento es sacar dos cartas de una baraja sin reponerlas, mi espacio muestral cambia al sacar la segunda carta y, por lo tanto, se ven afectados los sucesos.

✍ ***Ejercicios*** ***3***

1. En un experimento se extrae una ficha de una caja que contiene 15 fichas numeradas del 6 al 20, todas con las mismas propiedades físicas.

   a) Escribir el espacio muestral.

   b) Determinar si es un experimento equiprobable o no. Justificar.

   c) Definir en este experimento un suceso imposible y un suceso seguro.

   d) Escribir el conjunto de casos favorables que definen los siguientes sucesos:

   - $A = \{\text{Extraer una ficha con un número par}\}$
   - $B = \{\text{Extraer una ficha con un número primo}\}$
   - $C = \{\text{Extraer una ficha con un número mayor que 15 o con un número impar}\}$
   - $D = \{\text{Extraer dos fichas cuyos números sumen menos que 18}\}$

   e) ¿Qué relación existe entre los sucesos A y B? ¿Y entre los sucesos D y C?

2. En un experimento un estudiante responde al azar tres preguntas cuyas respuesta pueden ser verdadero o falso.

   a) Escribir el espacio muestral.

   b) Determinar si es un experimento equiprobable o no. Justificar.

   c) Definir en este experimento un suceso imposible y un suceso seguro.

   d) Escribir el conjunto de casos favorables que definen los siguientes sucesos:

   - $A = \{\text{Responder la segunda pregunta verdadera}\}$
   - $B = \{\text{Responder la primera y la última pregunta verdadera}\}$
   - $C = \{\text{Responder las tres preguntas falsas}\}$
   - $D = \{\text{Responder las tres preguntas verdaderas}\}$
   - $F = \{\text{Responder una pregunta verdadera y una pregunta falsa}\}$

   e) ¿Qué relación existe entre los sucesos A y B? ¿Y entre los sucesos C y D?

---

2. Probabilidad clásica

La probabilidad clásica o también conocida como probabilidad a priori, se basa en la idea de que, bajo ciertas condiciones, se puede determinar la probabilidad de algún resultado de un experimento antes de la realización de éste.

La forma matemática de obtener esta probabilidad teórica se basa en la **Regla de Laplace**.

2.1. Regla de Laplace

Si un experimento aleatorio tiene un número finito de resultados conocidos, de los cuales todos tienen la misma posibilidad de ocurrir, entonces la probabilidad de que ocurra un suceso A es la razón entre el número de casos favorables y el número de todos los casos posibles:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

✎ ***Ejemplo***

1. *Consideremos lanzar un dado tradicional y observar los puntos de la cara superior. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:*



   a) $A =$ "Obtener un número par"
   b) $B =$ "Obtener un divisor de 120"
   c) $C =$ "Obtener un múltiplo de 8"
   d) $D =$ "Obtener un número mayor que 5"
   e) $F =$ "Obtener un número primo impar"

Solución: Analicemos por casos:

a) Para el suceso $A =$ "Obtener un número par" tenemos lo siguiente:

Casos favorables: $\{2, 4, 6\} \longrightarrow 3$ elementos
Casos totales: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow 6$ elementos

La probabilidad de obtener un número par queda expresada por la regla de Laplace del siguiente modo:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Para el suceso $B =$ "Obtener un divisor de 120" tenemos lo siguiente:

Casos favorables: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow 6$ elementos
Casos totales: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow 6$ elementos

La probabilidad de obtener un divisor de 120 queda expresada por la regla de Laplace del siguiente modo:

$$P(B) = \frac{6}{6} = 1$$

Como la $P(B) = 1$, entonces obtener un divisor de 120 al lanzar un dado común es un suceso seguro.

c) Para el suceso $C =$ "Obtener un múltiplo de 8" tenemos lo siguiente:

Casos favorables: No hay $\longrightarrow 0$ elementos
Casos totales: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow 6$ elementos

La probabilidad de obtener un múltiplo de 8 queda expresada por la regla de Laplace del siguiente modo:

$$P(C) = \frac{0}{6} = 0$$

Como la $P(C) = 0$, entonces la posibilidad de obtener un múltiplo de 8 es nula, es decir, C es un suceso imposible.

d) Para el suceso $D =$ "Obtener un número mayor que 5" tenemos lo siguiente:

Casos favorables: $\{6\} \longrightarrow 1$ elemento
Casos totales: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow 6$ elementos

La probabilidad de obtener un número mayor que 5 queda expresada por la regla de Laplace del siguiente modo:

$$P(D) = \frac{1}{6}$$

e) Para el suceso $F =$ "Obtener un número primo impar" tenemos lo siguiente:

Casos favorables: $\{3, 5\} \longrightarrow 2$ elementos
Casos totales: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow 6$ elementos

La probabilidad de obtener un número primo impar queda expresada por la regla de Laplace del siguiente modo:

$$P(F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2. *Cada estudiante de un curso compuesto por 40 personas tiene que vender una rifa que consta de un premio único. Si cada rifa tiene 30 números, ¿cuántos números tengo que comprar para tener un* $10\,\%$ *de probabilidad de ganar?*

Solución: Si cada rifa posee 30 números y son 40 estudiantes en total, entonces hay $30 \cdot 40 = 1.200$ números en total. Si quiero comprar X números para que la probabilidad de ganar sea de un $10\,\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, entonces:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\text{Números de la rifa que tengo que comprar}}{\text{Cantidad total de números de rifa}} \\ \frac{1}{10} &= \frac{X}{1.200} \\ X &= \frac{1}{10} \cdot 1.200 \\ X &= 120 \end{aligned}$$

Por lo tanto, debo comprar 120 números de rifa para tener un $10\,\%$ de probabilidad de ganar el premio único.

Desafío I



El profesor de matemática de Rebeca y Matías les plantea el siguiente problema:

"Un pasajero desea tomar una micro desde Talagante a Estación Central. Las micros que realizan este recorrido son de color verde y blanco. Si tanto la primera micro verde como la primera micro blanca salen a las 7:10 y luego comienzan a salir cada 20 minutos las micros verdes y cada 25 minutos las micros blancas, ¿cuál es la probabilidad de que el pasajero tome una micro verde si llega al paradero entre las 9:00 y las 10:00 de la mañana?"

Matías, entusiasmado con el problema, expone el siguiente desarrollo a Rebeca:

- Primero tienes que realizar una lista con las micros que puede tomar el pasajero entre las 09:00 y las 10:00 para contabilizar el total de posibilidades que tiene el pasajero:

$$\text{Micros Verdes: } 9:10 \ - \ 9:30 \ - \ 9:50$$

$$\text{Micros Blancas: } 9:15 \ - \ 9:40$$

- Luego observas cuantas micros verdes puede tomar el pasajero, en nuestro caso puede tomar 3 micros verdes.
- Finalmente calculamos la probabilidad de que el pasajero tome una micro verde:

$$P = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\,\%$$

Rebeca, luego de analizar el desarrollo, le dice a Matías que está equivocado.

¿Quién tiene la razón y por qué?

Respuesta

✍ *Ejercicios* 4

1. *Consideremos sacar de una baraja española*[2] *que posee 40 naipes, una carta al azar y observarla. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:*



   a) $A =$ "Obtener una carta de oro"
   b) $B =$ "Obtener una figura de cualquier pinta"
   c) $C =$ "Obtener una carta que no sea de espadas ni de basto"
   d) $D =$ "Obtener una carta que sea menor que 4"
   e) $F =$ "Obtener una carta que sea un caballo"

[2]La baraja española esta compuesta por 4 pintas, cada una de ellas posee 10 cartas de las cuales 7 corresponden a los números del 1 al 7 y 3 corresponden a las figuras del rey, del caballo y de la sota.

2. *En una sala de clases hay 20 mujeres y 20 hombres. Si se escogen 3 estudiantes al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:*

   a) $A =$ "Seleccionar 3 estudiantes del mismo sexo"
   b) $B =$ "Seleccionar 1 mujer y dos hombres"
   c) $C =$ "Seleccionar al menos un hombre"
   d) $D =$ "Seleccionar 4 estudiantes"
   e) $F =$ "Seleccionar dos o más mujeres"

2.2. Probabilidades de eventos

2.2.1. Probabilidad de sucesos complementarios

En algunas situaciones nos van a preguntar por la probabilidad de que ocurra la negación de un suceso, en este caso calculamos la probabilidad de la afirmación del suceso y se lo restamos a la unidad. Cabe destacar que si tenemos un suceso A y su negativo $\overline{A}$, entonces se dice que ambos sucesos son **complementarios** y la suma de sus probabilidades es igual a 1 :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Si el suceso $\overline{A}$ es la negación del suceso A,entonces la probabilidad de que ocurra el suceso $\overline{A}$ es:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

✎ ***Ejemplo***

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados, ***NO*** *se obtenga una suma igual a 7?*

Solución: Este ejercicio lo desarrollaremos usando la propiedad anterior. Definamos los sucesos:

$A =$ "Obtener una suma igual a 7"
$\overline{A} =$ "No obtener una suma igual a 7"

Calculemos la probabilidad del suceso A:

- El número de casos favorables es 6: $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
- El número de casos totales lo determinamos a través del **principio de la multiplicación**, el cual dice que si hay **n** elementos para distribuir en la primera posición y hay **m** elementos para distribuir en la segunda posición, entonces el total de parejas posibles es $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$, en este caso tenemos que distribuir 6 números en la primera posición y 6 números en la segunda, por lo tanto, tenemos $6 \cdot 6 = 36$ posibilidades en total.

De acuerdo a lo anterior la probabilidad del suceso A es:

$$P(\text{obtener una suma igual a 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Y la probabilidad de la negación de este suceso, es decir del suceso $\overline{A}$, es:

$$P(\textbf{no} \text{ obtener una suma igual a 7}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Finalmente, la probabilidad de no obtener una suma igual a 7 es de $\frac{5}{6}$.

2.2.2. Probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes

En algunas situaciones nos van a preguntar por la probabilidad de que ocurra un suceso u otro. En el caso de que estos sucesos sean mutuamente excluyentes calculamos las probabilidades por separado de cada uno de los sucesos y luego sumamos los resultados obtenidos.

*Si dos sucesos A y B son **mutuamente excluyentes**, entonces la probabilidad de que ocurra el suceso A **ó** el suceso B es:*

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

✎ ***Ejemplo***

¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta de una baraja inglesa[3] *se obtenga un rey o un número?*

Solución: Este ejercicio lo desarrollaremos usando la propiedad anterior. Definamos los sucesos:

$$A = \text{“Sacar un rey”}$$
$$B = \text{“Sacar un número”}$$

Estos dos sucesos son mutuamente excluyentes ya que no pueden ocurrir simultáneamente. Calculemos las probabilidades correspondientes a cada suceso:

- Probabilidad de sacar un rey: El número de casos favorables corresponde a 4 ya que hay un rey por pinta (corazón, diamante, pica y trébol) y el número total de cartas es 52, ya que hay 13 cartas por cada pinta.

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

- Probabilidad de sacar un número: El número de casos favorables es 40 ya que la baraja posee 12 figuras (jota, reina y rey por cada pinta) y 40 números (10 por cada pinta).

$$P(B) = \frac{40}{52}$$

[3]Una baraja inglesa esta compuesta por 52 cartas divididas en 4 grupos de 13 cartas cada uno (corazones, picas, tréboles y diamentes), de las cuales 9 cartas son numeradas y 4 literales: As(A), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Sota(J), Reina(Q), Rey(K).

Luego, aplicando la propiedad anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} P(\text{Sacar un rey o un número}) &= P(\text{Sacar un rey}) + P(\text{Sacar un número}) \\ P(\text{Sacar un rey o un número}) &= \frac{4}{52} + \frac{40}{52} \\ P(\text{Sacar un rey o un número}) &= \frac{44}{52} \\ P(\text{Sacar un rey o un número}) &= \frac{11}{13} \end{aligned}$$

Finalmente, la probabilidad de sacar un rey o un número de una baraja inglesa es $\frac{11}{13}$.

2.2.3. Probabilidad de sucesos que no son mutuamente excluyentes

En algunas situaciones nos van a preguntar por la probabilidad de que ocurra un suceso u otro. En el caso de que los sucesos no sean mutuamente excluyentes, calculamos las probabilidades por separado de cada uno de los sucesos y la probabilidad de que ocurran ambos sucesos juntos, luego sumamos las probabilidades por separado de los sucesos y finalmente le restamos la probabilidad de que ocurran juntos.

Si dos sucesos A y B ***no son mutuamente excluyentes****, entonces la probabilidad de que ocurra el suceso A* ***ó*** *el suceso B es:*

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

✎ ***Ejemplo***

¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bolita de una caja con 25 bolitas numeradas del 1 al 25 se obtenga una número múltiplo de 4 o un número mayor que 15?

Solución: Este ejercicio lo desarrollaremos usando la propiedad anterior. Definamos los sucesos:

$$\begin{aligned} A &= \text{“Obtener un número mayor que 15”} \\ B &= \text{“Obtener un número múltiplo de 4”} \\ A \text{ y } B &= \text{“Obtener un número mayor que 15 y que sea múltiplo de 4”} \end{aligned}$$

Los sucesos A y B no son mutuamente excluyentes ya que tienen elementos en común. Calculemos las probabilidades correspondientes a cada suceso:

- Probabilidad de obtener un número mayor que 15: En este caso la cantidad de bolitas con números mayores a 15 son 10, $\{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$, y el número total de bolitas es 25.

$$P(A) = \frac{10}{25}$$

- Probabilidad de sacar un número múltiplo de 4: En este caso la cantidad de bolitas con números múltiplos de 4 son 6, $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$, y el número total de bolitas es 25.

$$P(B) = \frac{6}{25}$$

- Probabilidad de sacar un número mayor que 15 y múltiplo de 4: En este caso las bolitas que cumplen con estas dos condiciones corresponde a la intersección de los sucesos A y B, por lo tanto, serán 3 bolitas, $\{16, 20, 24\}$, de un total de 25.

$$P(A \text{ y } B) = \frac{3}{25}$$

Luego, aplicando la propiedad anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
P(\text{Sacar un número mayor que 15 o múltiplo de 4}) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B) \\
P(\text{Sacar un número mayor que 15 o múltiplo de 4}) &= \frac{10}{25} + \frac{6}{25} - \frac{3}{25} \\
P(\text{Sacar un número mayor que 15 o múltiplo de 4}) &= \frac{16}{25} - \frac{3}{25} \\
P(\text{Sacar un número mayor que 15 o múltiplo de 4}) &= \frac{13}{25}
\end{aligned}$$

Finalmente, la probabilidad de sacar una bolita con un número mayor que 15 o múltiplo de 4 es de $\frac{13}{25}$.

2.2.4. Probabilidad de sucesos independientes

En algunas situaciones nos van a preguntar por la probabilidad de que ocurran dos sucesos simultáneamente, en el caso de que esos sucesos sean independientes, entonces calculamos las probabilidades por separado de cada uno de los sucesos y luego multiplicamos los resultados obtenidos.

*Si dos sucesos A y B son **independientes**, entonces la probabilidad de que ocurra el suceso A **y** el suceso B es:*

$$P(A \ \wedge \ B) = P(A) \cdot P(B)$$

✎ ***Ejemplo***

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado no cargado de seis caras dos veces obtengamos un 5 en el primer lanzamiento y un número par en el segundo lanzamiento?

Solución: Este ejercicio lo desarrollaremos usando la propiedad anterior, definamos los sucesos:

$$\begin{aligned}
A &= \text{“Obtener el número 5”} \\
B &= \text{“Obtener un número par”}
\end{aligned}$$

Los sucesos son independientes porque la probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento no se ve afectada en absoluto por el resultado obtenido en el primer lanzamiento. Calculemos las probabilidades correspondientes a cada suceso:

- Probabilidad de obtener el número 5: En este caso tenemos un caso favorable de un total de 6 números que nos pueden salir al lanzar un dado.

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

- Probabilidad de sacar un número par: El número de casos favorables es 3 ($\{2, 4, 6\}$) de un total de 6 números que nos pueden salir en el segundo lanzamiento del dado.

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

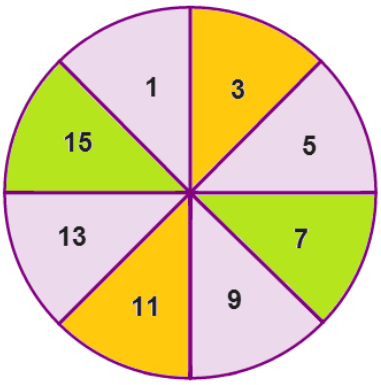
Luego, aplicando la propiedad anterior, tenemos:

$$P(\text{Obtener un 5 y luego un par}) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(\text{Obtener un 5 y luego un par}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$$
$$P(\text{Obtener un 5 y luego un par}) = \frac{1}{12}$$

Finalmente, la probabilidad de sacar un 5 en el primer lanzamiento y luego un número impar en el segundo lanzamiento es de $\frac{1}{12}$.

✍ *Ejercicios* 5

1. Una ruleta está dividida en 8 sectores de igual tamaño numerados con los primeros números impares, tal como se muestra en la figura.



   a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar la ruleta obtenga un número mayor que 7?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un número primo?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un divisor de 30 y un múltiplo de 7?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar la ruleta se detenga sobre el color morado?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos veces la ruleta se obtenga amarillo en las dos ocasiones?

f) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga verde en el primer lanzamiento, morado en el segundo lanzamiento y verde en el tercero?

2. ¿Qué es más probable, obtener un 4 al lanzar un dado común no cargado 4 veces o sacar dos cuatros al lanzar el mismo lado 8 veces o sacar tres cuatros al lanzar el mismo lado 12 veces?

3. Javiera perdió el número de dirección de la casa de una compañera del colegio. Si el número de la casa consta de 4 cifras y ella logra recordar las dos del centro. ¿Cuál es la probabilidad de que Javiera acierte en el número de casa si sabe que el primer dígito es primo y el último número es múltiplo de 2?

4. En una competencia de penales compiten 4 futbolistas: Lionel Messi, Cristiano Ronaldo, David Villa y Alexis Sanchez. Si Messi tiene el triple de posibilidad de anotar el penal que Ronaldo, Villa tiene mitad de posibilidad de anotar el penal que Sanchez y Sanchez tiene el doble de posibilidad de anotar el penal que Ronaldo.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que Alexis Sanches acierte el penal?

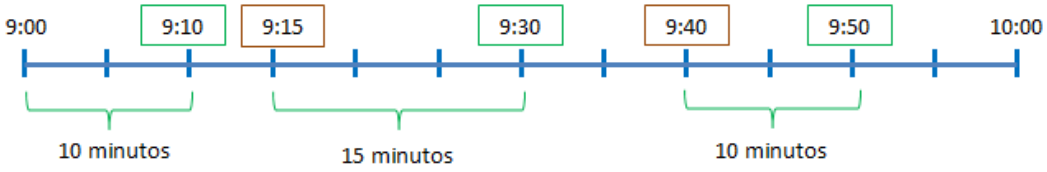
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que Ronaldo o Villa acierten el penal?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que Messi no acierte el penal?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que Sanchez y Villa acierten los penales?

Desafíos resueltos

✓ Desafío I: Matías hizo una lista con las horas que pasaba cada micro entre las 9:00 y las 10:00 de la mañana. Representémosla de forma gráfica:



Observando la imagen podemos ver que entre las 9:00 y las 9:10 el pasajero puede tomar una micro verde con un intervalo de 10 minutos de espera. Luego la segunda oportunidad de tomar una micro verde es entre las 9:15 y 9:30, con un intervalo de 15 minutos de espera. Finalmente, la última oportunidad de tomar una micro verde es entre las 9:40 y las 9:50 con un intervalo de espera de 10 minutos. Por lo tanto, la probabilidad de que el pasajero tome una micro verde queda determinada de la siguiente forma:

$$P = \frac{\text{Tiempo favorable para tomar una micro verde}}{\text{Tiempo total}}$$
$$P = \frac{35}{60}$$
$$P \approx 0,58$$
$$P = 58\,\%$$

Por lo tanto, Rebeca tiene la razón ya que Matías estaba equivocado. Volver

Bibliografía

[1] Manual de preparación PSU Matemática, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.

[2] Desarrollo del pensamiento matemático, Introducción a la Porbabilidad, No 18, *Julio 2007*,
Martín Andonegui Zabala.

[3] Introducción a la Estadística, *Segunda Edición, 2007*,
Sheldom M.Ross.