open green road

Guía Matemática

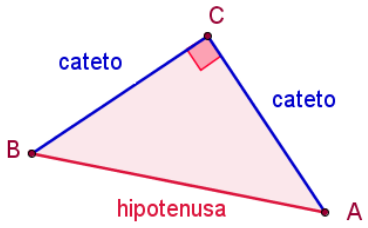
TRIÁNGULO RECTÁNGULO

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

1. Triángulo Rectángulo

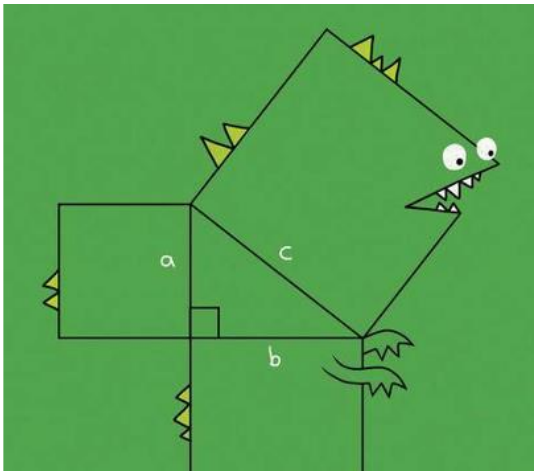
Un triángulo se denomina rectángulo si uno de sus ángulos mide 90° y por ende los otros dos ángulos son agudos. Los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado opuesto a este ángulo se denomina hipotenusa.



2. Teorema de Pitágoras

Como enuncio Euclides en su "Libro I de los elementos de Euclides":

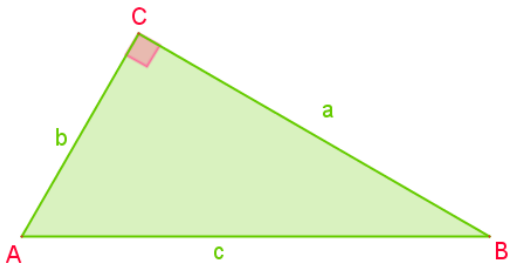
En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados que comprenden el ángulo recto.



Esta proposición enunciada hace más de 400 años, es lo que conocemos hoy en día como el Teorema de Pitágoras. En lenguaje actual, es equivalente a decir que el cuadrado de la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de la medida de los catetos al cuadrado..

Símbolicamente, si a y b corresponden a los catetos de un triángulo rectángulo y c a su hipotenusa, entonces el Teorema de Pitágoras nos dice lo siguiente:

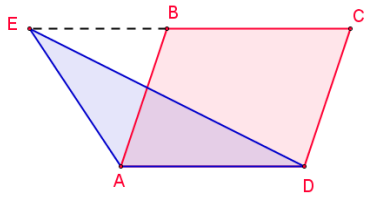
$$c^2 = a^2 + b^2$$



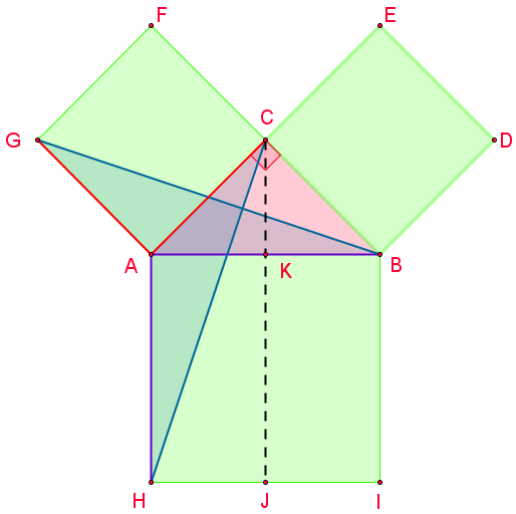
Este teorema matemático posee más de 370 demostraciones. A continuación analizaremos le demostración que realizó Euclides:

Esta demostración se basa en la idea de que si dentro de un paralelogramo se traza un triángulo con la misma base, entonces el área de ese triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo.

$$2 \cdot \text{Á}_{\triangle AED} = \text{Á}_{ABCD}$$



Dicho esto, lo que buscamos demostrar es que el área de los cuadrados dibujados sobre los catetos sea igual al área del cuadrado dibujado sobre la hipotenusa. Para esto, en una primera instancia, trazaremos los segmentos $\overline{CH}$ y $\overline{GB}$:



Observando la figura podemos decir los triángulos formados $\triangle ABG$ y $\triangle ACH$ son congruentes ya que:

$$\overline{AB} \cong \overline{AH} \quad \text{(Por ser los lados del cuadrado } ABIH\text{)}$$
$$\overline{AG} \cong \overline{AC} \quad \text{(Por ser los lados del cuadrado } AGFC\text{)}$$
$$\measuredangle BAG \cong \measuredangle HAC \quad \text{(Por ser ambos la suma de un ángulo recto y } \measuredangle BAC\text{)}$$

$$\triangle ABG \cong \triangle ACH \quad \text{(Por criterio de congruencia L-A-L)}$$

Como vemos los triángulos formados son congruentes, pero además tienen otra particularidad:

- El triángulo $\triangle ABG$ esta trazado sobre el paralelogramo $AGFC$, por lo tanto el doble del área de ese triángulo corresponde al área del cuadrado.

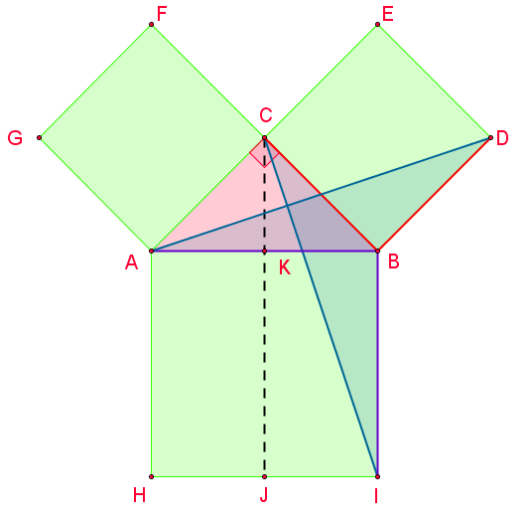
$$2 \cdot \text{Á}_{\triangle ABG} = \text{Á}_{AGFC}$$

- El triángulo $\triangle AHC$ esta trazado sobre el paralelogramo $AHJK$, por lo tanto el doble del área de ese triángulo corresponde al área del rectángulo.

$$2 \cdot \text{Á}_{\triangle AHC} = \text{Á}_{AHJK}$$

Y como los triángulos $\triangle ABG$ y $\triangle ACH$ son congruentes, entonces el área del cuadrado $AGFC$ es equivalente al área del rectángulo $AHJK$.

Ahora, para terminar esta demostración, debemos razonar de la misma manera pero para los triángulo $\triangle ADB$ y $\triangle ICB$ formados por la unión de los puntos A con D y C con I respectivamente.



- Los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle ICB$ son congruentes ya que:

$$\overline{BD} \cong \overline{BC} \quad \text{(Por ser los lados del cuadrado } BDEC\text{)}$$
$$\overline{BA} \cong \overline{BI} \quad \text{(Por ser los lados del cuadrado } ABIH\text{)}$$
$$\measuredangle DBA \cong \measuredangle CBI \quad \text{(Por ser ambos la suma de un ángulo recto y } \measuredangle CBA\text{)}$$

$$\triangle ADB \cong \triangle ICB \quad \text{(Por criterio de congruencia L-A-L)}$$

- El triángulo $\triangle ADB$ está trazado sobre el paralelogramo $BDEC$ y el triángulo $\triangle ICB$ está trazado sobre el paralelogramo $BIJK$, por lo tanto tienen áreas equivalentes:

$$2 \cdot \text{Á}_{\triangle ADB} = \text{Á}_{BDEC}$$
$$2 \cdot \text{Á}_{\triangle ICB} = \text{Á}_{BIJK}$$

$$\text{Á}_{BDEC} = \text{Á}_{BIJK}$$

Por último tenemos las siguientes relaciones:

$$\text{Á}_{AGFC} = \text{Á}_{AHJK}$$
$$\text{Á}_{BDEC} = \text{Á}_{BIJK}$$

$$\text{Á}_{AGFC} + \text{Á}_{BDEC} = \text{Á}_{AHJK} + \text{Á}_{BIJK}$$
$$\text{Á}_{AGFC} + \text{Á}_{BDEC} = \text{Á}_{AHIB}$$

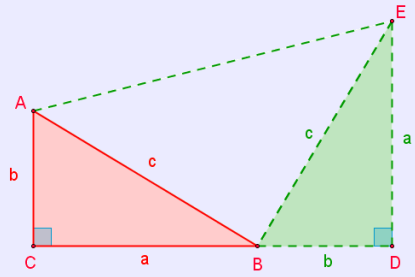
Así, si el lado del cuadrado $AGFC$ es b, el lado del cuadrado $BDEC$ es a y el lado del cuadrado $AHIB$ es c, entonces:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Desafío 1



A partir de la siguiente figura, demuestre el Teorema de Pitágoras.



Respuesta

2.1. Tríos Pitagóricos

Los tríos pitagóricos corresponden a tres números naturales que satisfacen el teorema de Pitágoras, por lo tanto pueden servir como las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Los tríos pitagóricos son infinitos, pero el más conocido es el formado por los números 3, 4 y 5. A partir de estos números se pueden formar otros tríos multiplicando los números por un entero positivo. La siguiente tabla muestra algunos tríos pitagóricos que se pueden formar a partir de los números 3, 4 y 5:

Cateto	Cateto	Hipotenusa
3	4	5
6	8	10
9	12	15
12	16	20
15	20	25

Desafío 2



¿Cómo demostrarías que los números $a \cdot m$, $b \cdot m$ y $c \cdot m$ con $m \in \mathbb{N}$ son un trío pitagórico si los números a, b y c lo son ?

Respuesta

Los tríos pitagóricos que surgen a partir de los números 3, 4 y 5 no son los únicos que existen. A continuación daremos a conocer una ecuación que me permite conocer otros tríos pitagóricos:

Si x e y son números naturales tales que $x > y$, entonces los números $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$ y $c = x^2 + y^2$ son un trío pitagórico.

La siguiente tabla muestra los tríos pitagóricos más utilizados:

Cateto	Cateto	Hipotenusa
3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
12	35	37

✎ ***Ejemplo***

Calcular la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden $8[cm]$ y $6[cm]$.

Solución: Para realizar esto debemos utilizar el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}(Hipotenusa)^2 &= (Cateto)^2 + (Cateto)^2 \\ (Hipotenusa)^2 &= (8^2 + 6^2)[\text{cm}^2] \\ (Hipotenusa)^2 &= 100[\text{cm}^2] \\ Diagonal &= 10[\text{cm}]\end{aligned}$$

✍ ***Ejercicios*** **1**

Resolver los siguientes ejercicios.

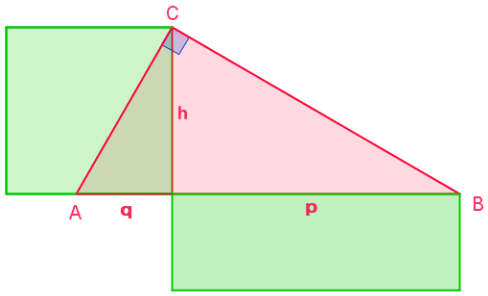
1. Calcular los catetos de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 7[cm].
2. Calcular la hipotenusa de un rectángulo cuyos catetos miden 4[cm] y 11[cm].
3. Calcular el lado de un rombo cuyas diagonales miden 16[cm] y 18[cm].
4. Calcular la altura de un rectángulo cuya base mide 10[cm] y cuya diagonal es igual a 15[cm].
5. Calcular el lado de un cuadrado cuya diagonal es igual a 24[cm].
6. Calcular la altura de un triángulo isósceles de base 6[cm] y lado 9[cm].

---

3. Teorema de Euclides de la altura

El teorema de Euclides relacionado con la altura nos enuncia lo siguiente:

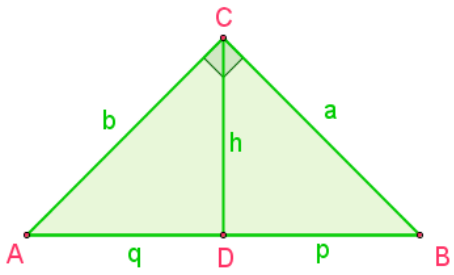
En un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la altura es equivalente al rectángulo formado por las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



En lenguaje actual es equivalente a decir que el cuadrado de la medida de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de la medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

Simbólicamente, si p es la proyección del cateto a sobre la hipotenusa, q es la proyección del cateto b sobre la hipotenusa y h es la altura que cae en la hipotenusa, el teorema de Euclides referente a la altura nos dice lo siguiente:

$$h^2 = p \cdot q$$



A continuación mostraremos una demostración de este teorema a través de la semejanza de triángulos.

Al trazar la altura relativa a la hipotenusa en el triángulo $\triangle ABC$ se forman dos triángulos que tienen los mimos ángulos. Al observar el $\triangle ABC$ tenemos que si el $\measuredangle CAB = \alpha$ entonces el $\measuredangle CBA = 90° - \alpha$. Por otra lado, si observamos el $\triangle CAD$, al ser el $\measuredangle CAD = \alpha$ y el $\measuredangle ADC$ recto, entonces el $\measuredangle ACD = 90° - \alpha$. En base a esto los ángulos $\measuredangle CBA$ y $\measuredangle ACD$ son congruentes.

Apoyándonos en esta congruencia de ángulos tenemos que los triángulos $\triangle CDA$ y $\triangle BDC$ son semejantes, ya que:

$$\measuredangle ACD \cong \measuredangle CBD \quad \text{(Por ser el mismo ángulo)}$$
$$\measuredangle CDA \cong \measuredangle BDC \quad \text{(Por ser ángulos rectos)}$$

$$\triangle CDA \sim \triangle BDC \quad \text{(Por criterio de semejanza A-A)}$$

Al ser estos triángulos semejantes, tenemos que sus lados homólogos son proporcionales, en particular:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$$
$$\overline{CD} \cdot \overline{DC} = \overline{DABD}$$
$$h^2 = q \cdot p$$

Desafío 3

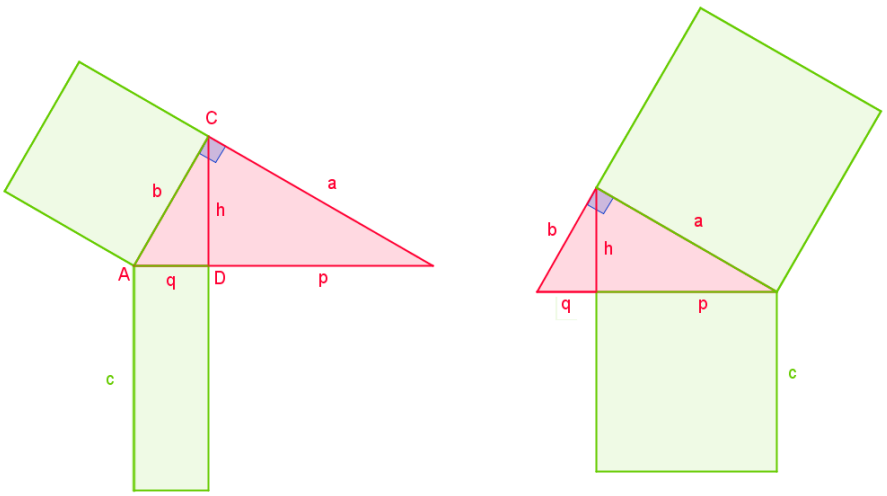


¿Podrías realizar la demostración del teorema de Euclides de la altura utilizando el teorema de Pitágoras antes visto?
Respuesta

4. Teorema de Euclides del cateto

El teorema de Euclides relacionado con los catetos nos enuncia lo siguiente:

En un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre un cateto es equivalente al rectángulo formado por hipotenusa entera y la proyección del mismo lado sobre la hipotenusa.

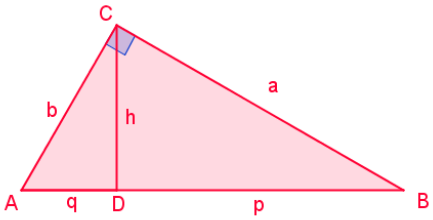


En lenguaje actual es equivalente a decir que el cuadrado de la medida de cada uno de los catetos de un triángulo rectángulo es equivalente al producto de la medida de la hipotenusa y la proyección de dicho cateto en esta.

Simbólicamente, si p es la proyección del cateto a sobre la hipotenusa c, q es la proyección del cateto b sobre la hipotenusa, el teorema de Euclides referente a los catetos nos dice lo siguiente:

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$



A continuación mostraremos la demostración de cada expresión anterior a través de la semejanza de triángulos.

Si trazamos la altura relativa a la hipotenusa se forman dos nuevos triángulos. Si nos fijamos en el triángulo original, es decir en el $\triangle ABC$ y en el nuevo triángulo $\triangle ACD$ podemos deducir que son semejantes ya que:

$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle DAC \quad \text{(Por ser el mismo ángulo)}$$
$$\measuredangle ACB \cong \measuredangle ADC \quad \text{(Por ser ángulos rectos)}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \quad \text{(Por criterio de semejanza A-A)}$$

Por lo tanto, al ser estos triángulos semejantes, tenemos que sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$$
$$\overline{CA} \cdot \overline{CA} = \overline{AB} \cdot \overline{DA}$$
$$b^2 = c \cdot q$$

Ahora bien, si nos fijamos nuevamente en el triángulo original $\triangle ABC$ pero esta vez en el otro triángulo formando, es decir en el $\triangle CBD$, podemos deducir que son semejantes ya que:

$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle CBD \quad \text{(Por ser el mismo ángulo)}$$
$$\measuredangle ACB \cong \measuredangle CDB \quad \text{(Por ser ángulos rectos)}$$

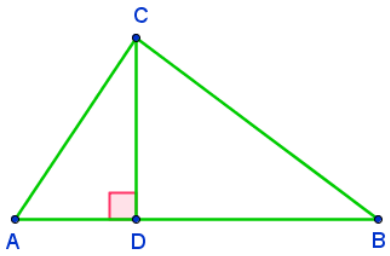
$$\triangle ABC \sim \triangle CBD \quad \text{(Por criterio de semejanza A-A)}$$

Por lo tanto, al ser estos triángulos semejantes, tenemos que sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$$
$$\overline{CB} \cdot \overline{CB} = \overline{AB} \cdot \overline{DB}$$
$$a^2 = c \cdot p$$

✍ *Ejercicios* 2

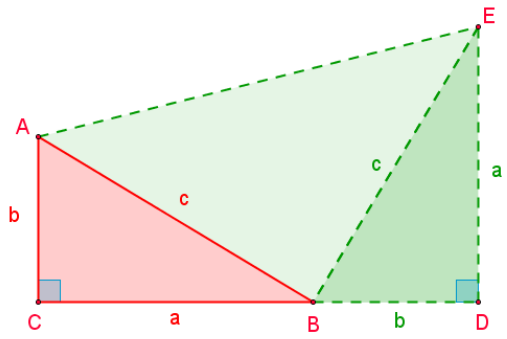
Resolver los siguientes ejercicios a partir del triángulo rectángulo en C que se muestra a continuación:



1. En la figura $\overline{AC} = \overline{BC} = 15$. Calcular el $\overline{CD}$.
2. En la figura $\overline{AD} = 5$ $\overline{DB} = 9$. Calcular los segmentos $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$.
3. En la figura $\overline{CD} = 10$ $\overline{AD} = 3$. Calcular el $\overline{DB}$.
4. En la figura $\overline{AD} = 2$ $\overline{CA} = 7$. Calcular los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ y $\overline{DB}$.
5. En la figura $\overline{AB} = 32$ $\overline{DB} = 8$. Calcular el $\overline{AC}$.

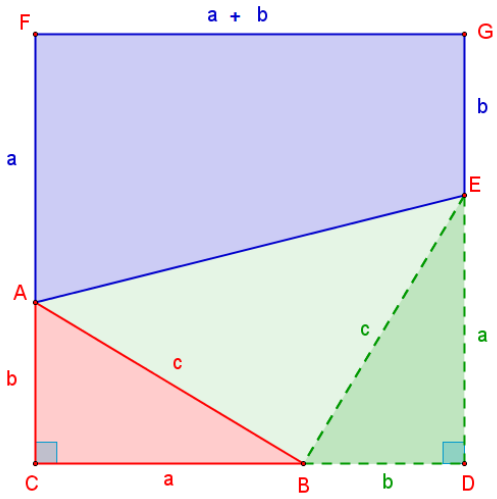
Desafíos resueltos

✓ Desafío I: Para demostrar el teorema de Pitágoras, calcularemos el área del trapecio de la figura de dos maneras distintas y las igualaremos, tal como se muestra a continuación:



1. Para determinar el área de la figura, calcularemos el área de cada triángulo por separado y luego las sumaremos:
   - El área del triángulo ABC corresponde a la multiplicación de los catetos (base por altura) divido por dos, es decir:
   $$\text{Á}_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b}{2}$$
   - El área del triángulo BDE corresponde, al igual que con el triángulo anterior, a la multiplicación de los catetos divido por dos, es decir:
   $$\text{Á}_{\triangle BDE} = \frac{b \cdot a}{2}$$
   - En el caso del triángulo ABE debemos notar que el ángulo $\measuredangle ABE$ es recto, ya que los ángulos $\measuredangle CBA$, $\measuredangle ABE$ y $\measuredangle EBD$ forman un ángulo extendido de 180° y la suma de los ángulos $\measuredangle CBA$ y $\measuredangle EBD$ es 90° ya que corresponden a los dos ángulos acutángulos de un triángulo rectángulo. Por lo tanto para determinar su área debemos proceder como los dos triángulos anteriores:
   $$\text{Á}_{\triangle ABE} = \frac{c \cdot c}{2}$$

   Finalmente, el área de la figura $ACDE$ es:
   $$\text{Á}_{\triangle ACDE} = \frac{2ab + c^2}{2}$$
2. Otra forma de calcular el área de esta figura es transformándola a un rectángulo cuya área es igual a la multiplicación de los dos lados distintos:



Por lo tanto el área de la figura $ACDE$ es:

$$\text{Á}_{\triangle ACDE} = \frac{(a+b)\cdot(a+b)}{2}$$

Al igualar las dos expresiones para determinar el área de la figura $ACDE$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{2} &= \frac{2ab+c^2}{2}\\ (a+b)^2 &= 2ab+c^2\\ a^2+2ab+b^2 &= 2ab+c^2\end{aligned}$$

$$a^2+b^2=c^2$$

Volver

✓ Desafío II: Para demostrar que los números $a\cdot m$, $b\cdot m$ y $c\cdot m$ forman un trío pitagórico debemos demostrar que cumplen con el teorema de Pitágoras. Desarrollemos la expresión $(am)^2+(bm)^2$:

$$\begin{aligned}(am)^2+(bm)^2 &= a^2m^2+b^2m^2\\ &= (a^2+b^2)m^2\end{aligned}$$

Pero como los números a, b y c son un trío pitagórico cumplen que $a^2+b^2=c^2$, por lo tanto:

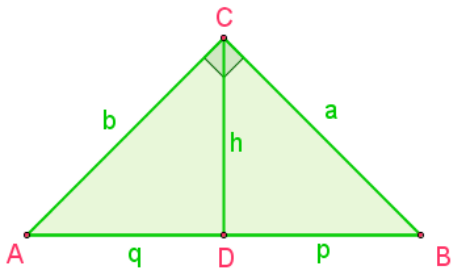
$$\begin{aligned}(am)^2+(bm)^2 &= (a^2+b^2)m^2\\ &= c^2m^2\\ &= (cm)^2\end{aligned}$$

Finalmente se cumple el teorema de Pitágoras y los números son un trío pitagórico:

$$(am)^2+(bm)^2=(cm)^2$$

Volver

✓ Desafío III: Basémonos en la siguiente figura para demostrar el teorema de Euclides de la altura utilizando el teorema de Pitágoras:



El triángulo $\triangle ADC$ es rectángulo en D, por lo tanto aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$b^2 = q^2 + h^2 \tag{1}$$

El triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo en C, por lo que aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{2}$$

El triángulo $\triangle BDC$ es rectángulo en D, por lo tanto aplicando el teorema de pitágoras tenemos:

$$a^2 = h^2 + p^2 \tag{3}$$

Al despejando el termino b^2 de las ecuaciones (1) y (2) y luego igualándolas tenemos lo siguiente:

$$q^2 + h^2 = c^2 - a^2$$
$$c^2 = q^2 + h^2 + a^2$$

Al sustituir el valor de a^2 obtenido en la ecuación (3) y el valor de c por $p + q$ tenemos:

$$(p+q)^2 = q^2 + h^2 + h^2 + p^2$$
$$p^2 + 2pq + q^2 = q^2 + h^2 + h^2 + p^2$$
$$2pq = 2h^2$$

$$h^2 = p \cdot q$$

Volver

Bibliografía

[1] Manual de preparación PSU Matemática, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.

[2] Desarrollo del pensamiento matemático, Polígonos. Triángulos, No 13, *Noviembre 2006*,
Martín Andonegui Zabala.