



open green
road



Guía Matemática

SEMEJANZA

tutora: Jacky Moreno



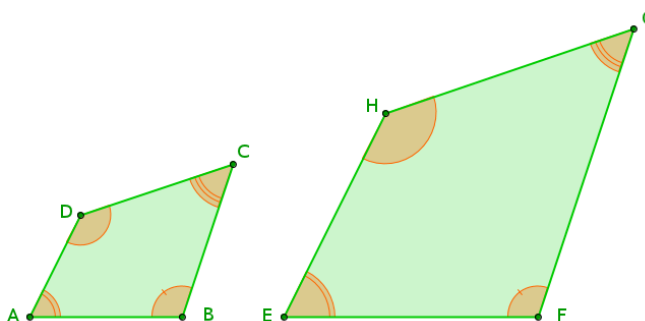
puntaje
nacional.cl

1. Semejanza

En el lenguaje que manejamos en nuestro diario vivir utilizamos la palabra semejanza para referirnos a que dos cosas comparten algunas características en común o que son parecidas entre sí, por ejemplo al decir “Eres semejante a tu papá” estamos haciendo referencia a que las dos personas comparten los mismos rasgos faciales, el mismo color de piel o la misma actitud o gestos.

La semejanza en matemática hace referencia a la igualdad de forma entre dos figuras pero no necesariamente al mismo tamaño, es decir puede una figura ser la ampliación o reducción de la otra.

Así, dos figuras planas serán semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales, es decir, la razón entre los lados homólogos es constante. De acuerdo a lo anterior, si tenemos que los cuadriláteros $ABCD$ y $EFGH$ son semejantes, se simboliza con \sim de la siguiente forma $ABCD \sim EFGH$ y cumplen lo siguiente:



- Los ángulos homólogos son congruentes, es decir, tienen la misma medida o abertura:

$$\begin{aligned}\angle DAB &\cong \angle HEF \\ \angle ABC &\cong \angle EFG \\ \angle BCD &\cong \angle FGH \\ \angle CDA &\cong \angle GHE\end{aligned}\tag{1}$$

- Los lados homólogos son proporcionales, es decir, la razón entre ellos es la misma:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &\text{ es homólogo con } \overline{EF} \\ \overline{BC} &\text{ es homólogo con } \overline{FG} \\ \overline{CD} &\text{ es homólogo con } \overline{GH} \\ \overline{DA} &\text{ es homólogo con } \overline{HE}\end{aligned}\tag{2}$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k$$

Desafío 1



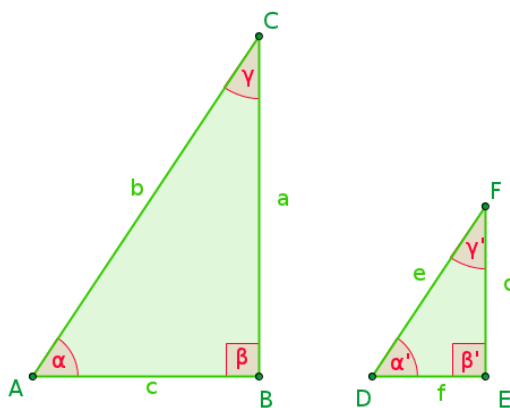
¿Que sucede si la constante de proporcionalidad entre los lados homólogos de dos figuras corresponde a la unidad?

[Respuesta](#)

2. Semejanza de triángulos

Como vimos anteriormente, la semejanza esta en directa relacion con las proporciones, de esta manera, dos triángulos son semejantes si existe una correspondencia entre sus elementos de tal forma que les permitan tener la misma forma y distinto tamaño.

Dos triángulos son semejantes si los ángulos del primero son congruentes uno a uno con los ángulos del segundo.



En general, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se cumple que:

- Los ángulos correspondientes tienen la misma medida:

$$\begin{aligned} \alpha &\cong \alpha' \\ \beta &\cong \beta' \\ \gamma &\cong \gamma' \end{aligned} \tag{3}$$

- Los lados correspondientes son proporcionales:

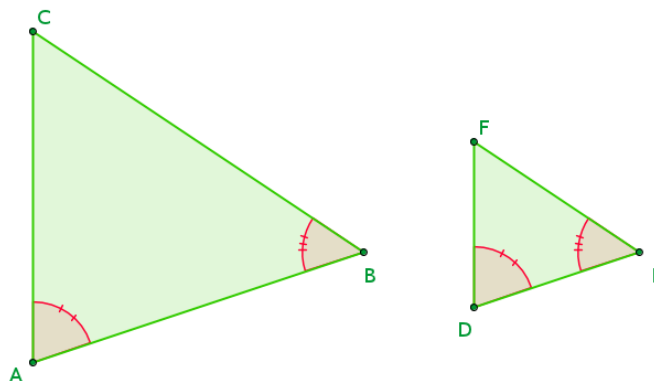
$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \text{constante}$$

2.1. Criterios de semejanza de triángulos

Al igual que con la congruencia de triángulos, podemos establecer ciertos criterios que nos faciliten la comprobación de que dos triángulos son semejantes sin la necesidad de demostrar las 6 condiciones antes vistas.

2.1.1. Criterio ángulo-ángulo

El criterio ángulo-ángulo abreviado como A-A, nos dice que si dos ángulos del primer triángulo son congruentes a otros dos ángulos del segundo triángulo, entonces los triángulos son semejantes. Esto se puede verificar fácilmente a través de la propiedad de que los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180° y que por ende los ángulos desconocidos en ambos triángulos miden lo mismo.

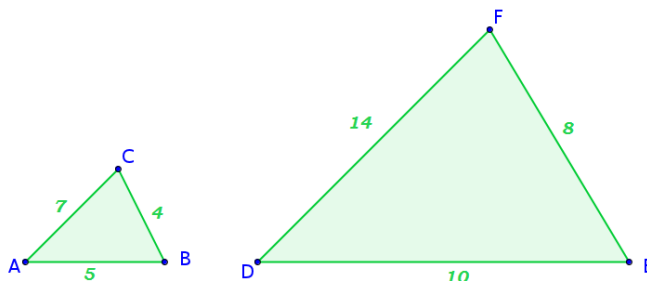


$$\begin{aligned}\angle CAB &\cong \angle FDE \\ \angle ABC &\cong \angle DEF \\ \therefore \triangle ABC &\sim \triangle DEF\end{aligned}$$

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.

2.1.2. Criterio lado-lado-lado

El criterio lado-lado-lado abreviado como L-L-L, nos dice que si tres lados del primer triángulo están en proporción con otros 3 lados del segundo triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

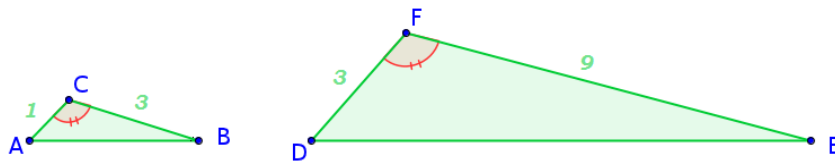


$$\begin{aligned}\overline{AB} : \overline{DE} &= 1 : 2 \\ \overline{BC} : \overline{EF} &= 1 : 2 \\ \overline{CA} : \overline{FD} &= 1 : 2 \\ \therefore \triangle ABC &\sim \triangle DEF\end{aligned}$$

Dos triángulos son semejantes si tienen todos sus lados correspondientes en igual proporción.

2.1.3. Criterio lado-ángulo-lado

El criterio lado-ángulo-lado abreviado como L-A-L, nos dice que si dos lados del primer triángulo son proporcionales a otros dos lados del segundo triángulo y los ángulos que están entre estos lados son congruentes entre sí, entonces los triángulos son semejantes.



$$\overline{AC} : \overline{DF} = 1 : 3$$

$$\overline{CB} : \overline{FE} = 1 : 3$$

$$\angle ACB \cong \angle DFE$$

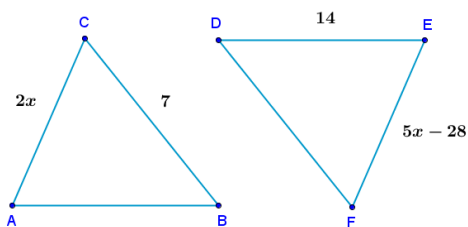
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Dos triángulos son semejantes si poseen dos de sus lados correspondientes en igual proporción y los ángulos comprendidos por dichos lados son congruentes.

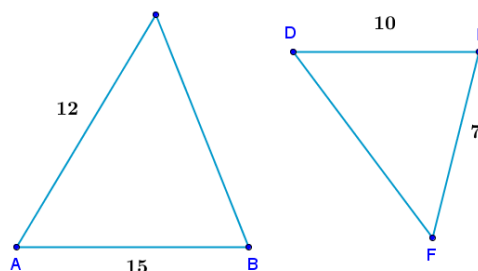
Ejercicios **1**

Resolver los siguientes ejercicios.

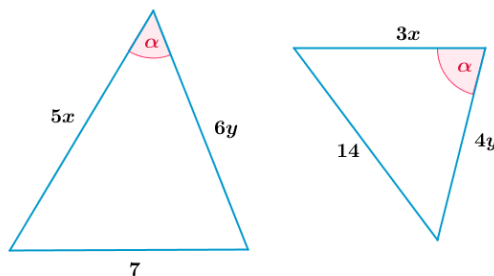
1. En la figura el $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. ¿Cuánto mide \overline{EF} ?



2. En la figura el $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. ¿Cuánto mide $5\overline{DF} - \overline{CB}$?



3. ¿Cuál es el valor de $x - y$?



2.2. Propiedades de triángulos semejantes

Si tenemos que dos triángulos son semejantes, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- La razón entre los perímetros de dos triángulos semejantes es igual a la razón entre dos lados correspondientes. Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k \iff \frac{\text{Perímetro } \triangle ABC}{\text{Perímetro } \triangle DEF} = k$$

- La razón entre las áreas de los dos triángulos semejantes es igual a la constante de proporcionalidad de los lados al cuadrado. Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k \iff \frac{\text{Área } \triangle ABC}{\text{Área } \triangle DEF} = k^2$$

- La razón entre las medidas de los elementos secundarios correspondientes de los triángulos semejantes es igual a la razón entre dos lados correspondientes de los triángulos. Sea $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, si:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k$$

Entonces:

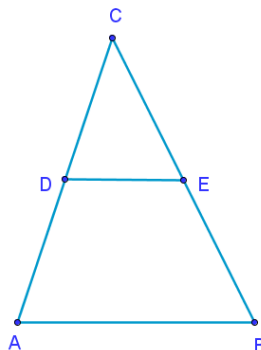
$$\begin{aligned} \frac{h_a}{h_d} &= \frac{h_b}{h_e} = \frac{h_c}{h_f} = k \\ \frac{t_a}{t_d} &= \frac{t_b}{t_e} = \frac{t_c}{t_f} = k \\ \frac{s_a}{s_d} &= \frac{s_b}{s_e} = \frac{s_c}{s_f} = k \\ \frac{b_\alpha}{b'_\alpha} &= \frac{b_\beta}{b'_\beta} = \frac{b_\gamma}{b'_\gamma} = k \\ \frac{m_a}{m_d} &= \frac{m_b}{m_e} = \frac{m_c}{m_f} = k \end{aligned}$$

Ejercicios

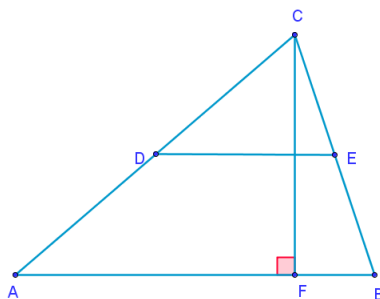
2

Resolver los siguientes ejercicios.

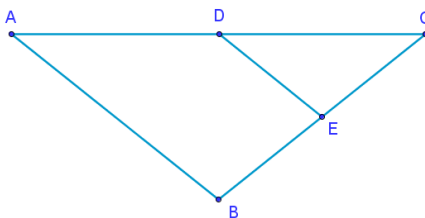
1. El $\triangle ABC$ de la figura tienen un área de $81\text{[m}^2\text{]}$. Si $\overline{AB} = 18\text{[m]}$, $\overline{DE} = 11\text{[m]}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, ¿cuál es el área del $\triangle CDE$ y del trapecio $ABED$?



2. En el $\triangle ABC$ de la figura los segmentos AB y DE son paralelos. Si $\overline{AB} = 25\text{[cm]}$, $\overline{DE} = 10\text{[cm]}$ y $\overline{CF} = 14\text{[cm]}$ ¿cuánto mide la altura del $\triangle CDE$?



3. En el $\triangle ABC$ de la figura se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. Si tenemos que $2\overline{CE} = \overline{AB} = \overline{CA} = 18\text{[m]}$ y que el perímetro del $\triangle ABC = 50\text{[m]}$, ¿cuánto mide el perímetro del $\triangle CDE$?



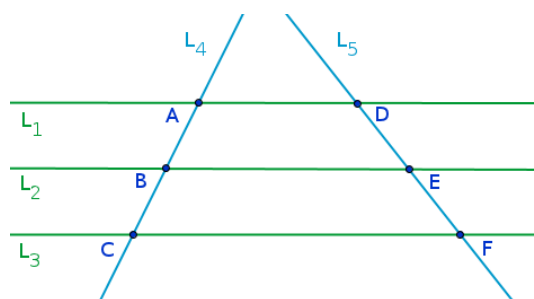
3. Teorema de Thales

El teorema de Thales nos enuncia lo siguiente:

Si dos o más rectas paralelas cortan a dos o más secantes, entonces los segmentos determinados por cada paralela en cada secantes son proporcionales.

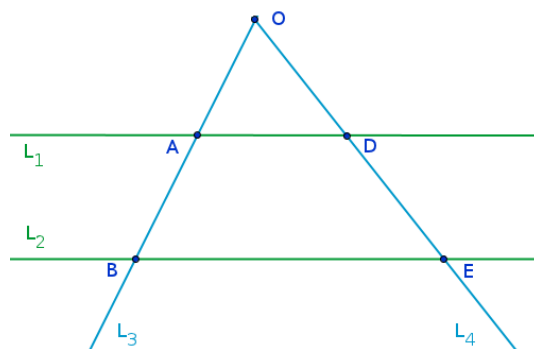
Para facilitar la visualización de este teorema lo dividiremos en tres casos:

- Sean las rectas L_1 , L_2 y L_3 paralelas entre sí, y las rectas L_4 y L_5 secantes a estas, tenemos las siguientes relaciones:



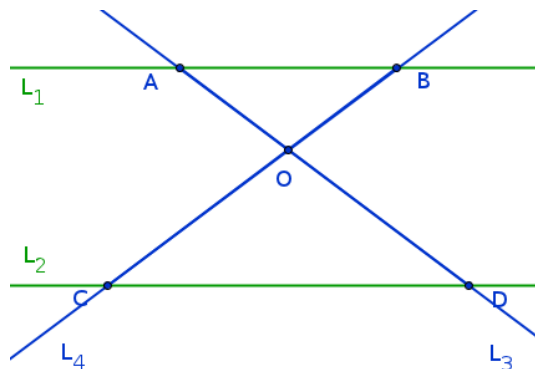
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

- Sean las rectas L_1 y L_2 paralelas entre sí, y las rectas L_3 y L_4 secantes a estas intersectadas en el punto O , tenemos las siguientes relaciones:



$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \quad \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$$

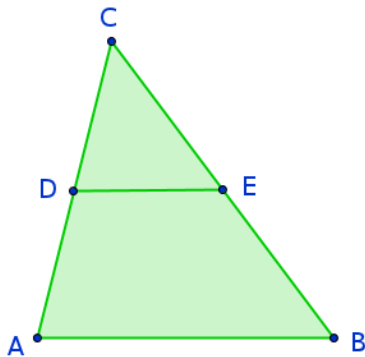
3. Sean las rectas L_1 y L_2 paralelas entre sí, y las rectas L_3 y L_4 secantes a estas intersectadas en el punto O al interior de las paralelas, podemos decir las siguientes relaciones:



$$\frac{OA}{OD} = \frac{BO}{OC} \quad \frac{AO}{OD} = \frac{AB}{CD}$$

3.1. Teorema particular de Thales

Este teorema nos dice que toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corte a los otros lados, divide a estos últimos en segmentos proporcionales. De la misma forma, si una recta divide dos lados de un triángulo en una misma proporción, entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.



$$DE \parallel AB \iff \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

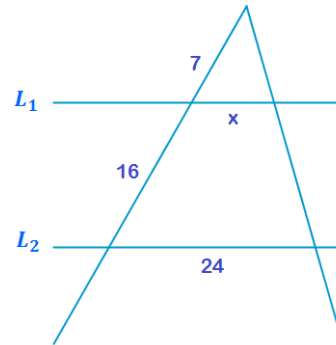
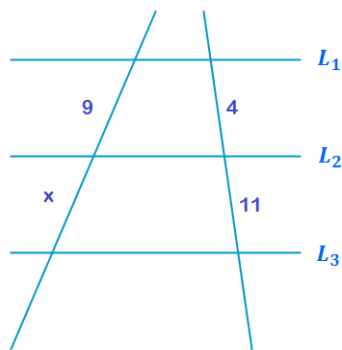
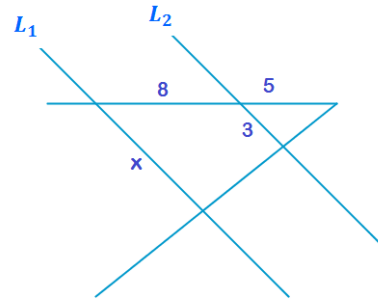
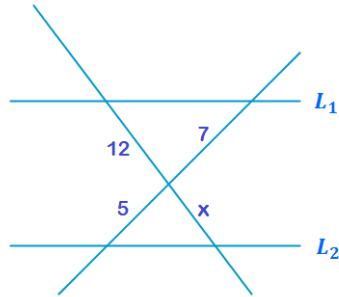
Toda paralela a un lado de un triángulo, determina otro triángulo semejante al primero.

Ejercicios

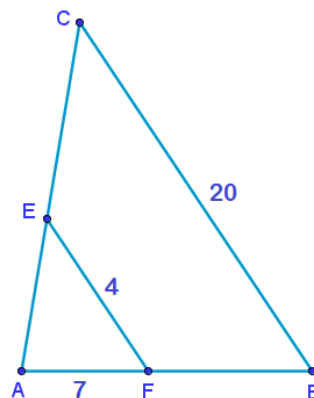
3

Resolver los siguientes ejercicios.

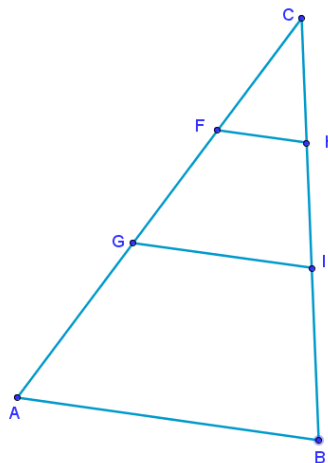
1. Determinar el valor de x si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$:



2. ¿Cuál es el valor del \overline{FB} si $\overline{CB} \parallel \overline{EF}$?



3. En el $\triangle ABC$ de la figura se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{GI} \parallel \overline{FH}$ y que $\overline{AC} = 2\overline{AB} = 38$. Si $\overline{CF} : \overline{FG} : \overline{GA} = 2 : 3 : 5$, ¿Cuál es el valor de \overline{FH} ?



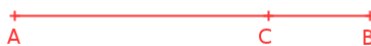
4. División de un segmento en razones dadas

La división de un segmento en una razón previamente determinada, es un problema matemático que se soluciona a través de la semejanza de triángulos. A continuación estudiaremos tres tipos de división de segmentos de acuerdo a donde se ubique el punto divisor.

4.1. División Interior

La división interior de un segmento consiste en encontrar un punto C al interior de un segmento \overline{AB} de tal forma que los segmentos determinados por C están en la razón dada $p : q$, es decir:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{p}{q}$$



De esta forma se dice que el punto C divide interiormente al segmento \overline{AB} en la razón $p : q$.

Ejemplo

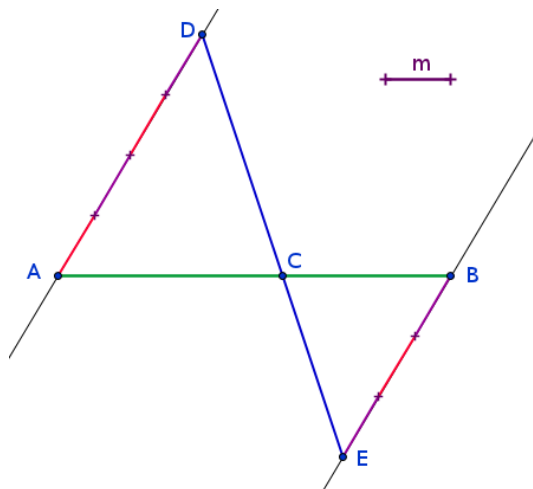
Dividir interiormente el segmento \overline{AB} en la razón $4 : 3$.



Solución: A continuación mostraremos como la semejanza de triángulos nos ayuda a poder realizar esta división interna.

1. Trazamos dos paralelas entre sí por lo punto A y B .

2. Se copia 4 veces un segmento cualquiera m hacia arriba de la paralela que sale del vértice A hasta formar el punto D .
3. Se copia 3 veces el mismo segmento m hacia abajo de la paralela que sale del vértice B hasta formar el punto E .
4. Se une los puntos D y E formando el segmento \overline{DE} que intersecta a al segmento \overline{AB} en el punto C .



A partir de lo dibujado anteriormente podemos decir que C corresponde al punto interior que divide al segmento \overline{AB} en la razón $4 : 3$ ya que basándonos en la construcción podemos afirmar lo siguiente:

$$\angle DAC \cong \angle EBC \quad (\text{Por ser ángulos alternos internos})$$

$$\angle ACD \cong \angle BCE \quad (\text{Por ser ángulos opuestos por el vértice})$$

$$\triangle ACD \sim \triangle BCE \quad (\text{Por criterio A-A})$$

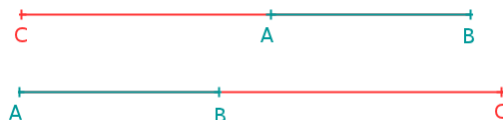
Como los triángulos son semejantes, entonces tenemos que los lados homólogos o correspondientes son proporcionales entre sí, en particular:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE} = \frac{4}{3}$$

4.2. División Exterior

La división exterior de un segmento consiste en encontrar un punto C en la extensión de uno de los lados de un segmento \overline{AB} de tal forma que los segmentos medidos desde ese punto C a los extremos del segmento estén en la razón dada $p : q$, es decir:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{p}{q}$$



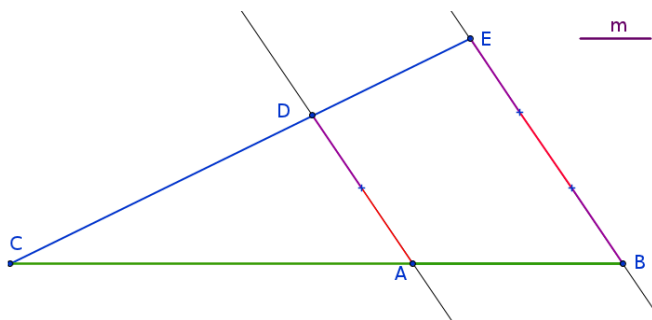
De esta forma se dice que el punto C divide exteriormente al segmento \overline{AB} en la razón $p : q$.

Ejemplo

Dividir exteriormente el segmento \overline{AB} en la razón $2 : 3$.

Solución: A continuación mostraremos como la semejanza de triángulos nos ayuda a poder realizar esta división externa.

1. Trazamos dos paralelas entre sí por lo punto A y B .
2. Se copia 2 veces un segmento cualquiera m hacia arriba de la paralela que sale del vértice A hasta formar el punto D .
3. Se copia 3 veces el mismo segmento m hacia el mismo sentido que el paso anterior por la paralela que sale del vértice B hasta formar el punto E .
4. Se une los puntos D y E formando el segmento \overline{DE} que intersecta a la prolongación del segmento \overline{AB} en el punto C .



A partir de lo dibujado anteriormente podemos decir que C corresponde al punto exterior que divide al segmento \overline{AB} en la razón $2 : 3$ ya que a partir de la construcción podemos afirmar lo siguiente:

$$\angle CAD \cong \angle CBE \quad (\text{Por ser ángulos correspondientes entre paralelas})$$

$$\angle ACD \cong \angle BCE \quad (\text{Por ser el mismo ángulo})$$

$$\triangle ACD \sim \triangle BCE \quad (\text{Por criterio A-A})$$

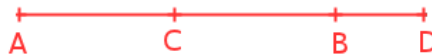
Como los triángulos son semejantes, entonces tenemos que los lados homólogos o correspondientes son proporcionales entre sí, en particular:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{EB} = \frac{2}{3}$$

4.3. División Armónica

La división armónica de un segmento consiste en dividir un segmento interior y exteriormente en una razón dada. Por lo tanto al dividir armónicamente el segmento \overline{AB} en la razón $p : q$, encontramos 4 segmentos determinados por los puntos C y D que cumplen lo siguiente:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{p}{q}$$



De esta forma se dice que el punto D divide exteriormente al segmento \overline{AB} y el punto C lo divide interiormente, ambos en la razón $p : q$.

Desafío 2



Dividir armónicamente el segmento $\overline{AB} = 5[\text{cm}]$ en la razón $5 : 2$. Ayudate de los criterios de semejanza de triángulos antes vistos para comprobar tu resultado.

[Respuesta](#)

4.4. Sección Aurea

La división de un segmento en sección aurea consiste en encontrar un punto al interior de un segmento de tal forma que la razón entre el segmento total y el segmento mayor debe ser igual a la razón entre el segmento mayor y el menor. Si en la figura el punto C divide al segmento \overline{AB} en sección aurea tal que $\overline{AC} > \overline{BC}$, entonces se cumple que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$



Ejemplo

Si un segmento \overline{AB} mide $1[\text{cm}]$, ¿cuánto mide el segmento mayor \overline{AC} si C es el punto que divide al trazo en sección aurea?

Solución: Ayudemos a partir de la siguiente gráfica:



Como C es el punto que divide al segmento en sección aurea, se cumple la proporción antes mencionada, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{AC} &= \frac{AC}{CB} \\ \frac{1}{x} &= \frac{x}{1-x} \\ 1-x &= x^2 \\ 0 &= x^2 + x - 1 \\ x &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto el segmento mayor mide $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Este número se conoce como el número áureo o el número de oro y se simboliza con la letra griega ϕ .

Ejercicios

4

Resolver los siguientes ejercicios.

- Si el punto P divide interiormente al \overline{AB} en la razón $2 : 5$, ¿cuánto mide \overline{AB} si el $\overline{AP} = 9$?
- Si el punto P divide exteriormente al \overline{AB} en la razón $3 : 7$, ¿cuánto mide $\overline{PB} - \overline{PA}$ si $\overline{PA} = 26$?
- En la figura M es punto medio del segmento AB . Si \overline{AP} cuadruplica al \overline{PM} , ¿en qué razón está dividido interiormente el segmento AB por el punto P ?

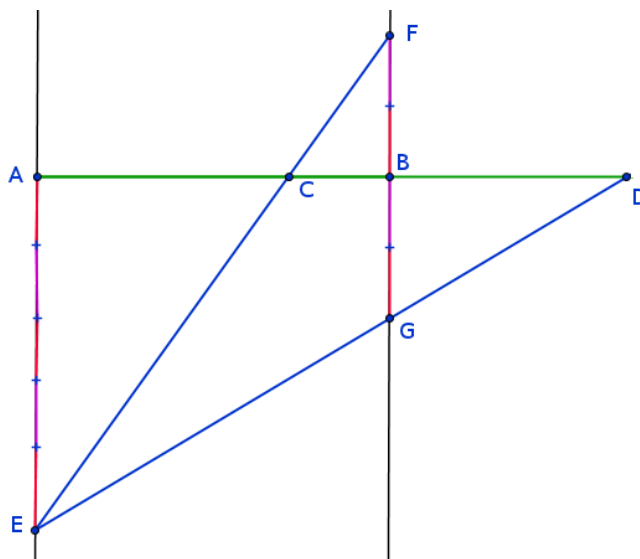


- ¿Qué ecuación me permite determinar el valor de \overline{AB} si el punto P lo divide en sección aurea de tal forma que $\overline{AP} > \overline{PB}$?



Desafíos resueltos

- ✓ Desafío I: En el caso de que la constante de proporcionalidad sea igual a 1, significa que las figuras que se están comparando son congruentes entre sí, ya que sus ángulos correspondientes y sus lados homólogos tienen la misma medida. [Volver](#)
- ✓ Desafío II: Para realizar la división armónica del segmento \overline{AB} seguiremos los siguientes pasos:



1. Trazamos dos paralelas entre sí por lo punto A y B .
2. Se copia 5 veces un segmento cualquiera m hacia arriba de la paralela que sale del vértice A hasta formar el punto E .
3. Se copia 2 veces el mismo segmento m hacia arriba y hacia abajo de la paralela que sale del vértice B hasta formar los puntos F y G .
4. Se unen los puntos E y F formando el segmento \overline{EF} que intersecta al segmento \overline{AB} en el punto C .
5. Se unen los puntos E y G formando el segmento \overline{EG} que intersecta a la prolongación del segmento \overline{AB} en el punto D .

A partir de lo dibujado anteriormente podemos decir que C corresponde al punto interior que divide al segmento \overline{AB} en la razón $5 : 2$ y que D corresponde al punto exterior que divide al segmento \overline{AB} en la misma razón. Esto se verifica a partir de las siguientes afirmaciones:

$$\angle EAC \cong \angle FBC \quad (\text{Por ser ángulos alternos internos entre paralelas})$$

$$\angle ACE \cong \angle BCF \quad (\text{Por ser ángulos opuestos por el vértice})$$

$$\triangle ACE \sim \triangle BCF \quad (\text{Por criterio A-A})$$

Como los triángulos son semejantes, entonces tenemos que los lados homólogos o correspondientes son proporcionales entre sí, por lo tanto:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AE}{BF} = \frac{5}{2}$$

Por otra parte podemos afirmar lo siguiente:

$$\angle DAE \cong \angle DBG \quad (\text{Por ser ángulos correspondientes entre paralelas})$$

$$\angle ADE \cong \angle BDG \quad (\text{Por ser el mismo ángulo})$$

$$\triangle ADE \sim \triangle BDG \quad (\text{Por criterio A-A})$$

Como los triángulos son semejantes, entonces tenemos que los lados homólogos o correspondientes son proporcionales entre sí, por lo tanto:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{BG} = \frac{5}{2}$$

Finalmente:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{5}{2}$$

[Volver](#)

Bibliografía

- [1] MANUAL DE PREPARACIÓN PSU MATEMÁTICA, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.
- [2] DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO, POLÍGONOS. TRIÁNGULOS, NO 13, *Noviembre 2006*,
Martín Andonegui Zabala.