open green road

Guía Matemática

FUNCIONES

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Concepto de función

Más de una vez habremos escuchado que el área de un cuadrado **depende** de la longitud de su lado; que el costo de producción de un producto está en **función** del precio de los materiales usados para su fabricación; o que la distancia recorrida por un automóvil que viaja a rapidez constante **depende** del tiempo que está en movimiento.

Todas estas ideas apuntan a una relación de **dependencia** entre variables. Dicha idea fue considerara por mucho tiempo como significado del concepto de *función*, pero no devela características más genéricas, profundas e interesantes de la relación entre elementos de dos conjuntos.

Una función f puede entenderse como una máquina que realiza un proceso de transformación de elementos de un conjunto de entrada A a otro conjunto de llegada B, donde todo elemento del conjunto A tiene un **único** resultado al ser transformado por f en un elemento de B. Así podemos decir que los elementos de A son procesados por f para ser transformados en elementos de B.

Por ejemplo, al presionar la tecla n de un teclado de notebook estamos generando una señal eléctrica única (elemento del conjunto de entrada) que es interpretada por el computador (función) para entregar finalmente la impresión de la letra n en la pantalla (conjunto de llegada). Acá la transformación es desde el conjunto de los impulsos eléctricos del teclado hasta el conjunto de los caracteres impresos en la pantalla LCD del notebook. Notemos que en esta experiencia cotidiana tenemos la certeza que al presionar la tecla con el símbolo m aparecerá en la pantalla ese símbolo y no otro, tanto que podemos asegurar que **todo** elemento del conjunto de partida, llamado *Dominio*, tienen una **única** "imagen" en el conjunto de llegada, denominado *Codominio*.

Si A y B son dos conjuntos no vacíos, podemos definir matemáticamente una relación f de los elementos de A en B como una función si:

- *El dominio coincide con el conjunto de partida de la relación, es decir $Dom(f) = A$.*
- *Todo elemento del dominio posee una **única** imagen en el codominio.*

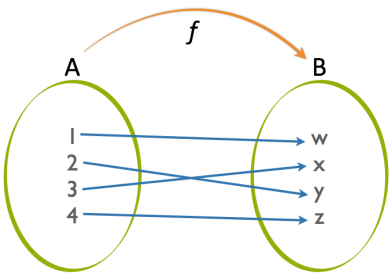
1.1. Notación

Hay variadas formas de representar una función f de A en B, la que usaremos es la siguiente:

$$f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longrightarrow & f(a) = b \end{array}$$

Entonces $f(a)$ representa la transformación del elemento a por la función f lo que da como resultado b. En este sentido diremos que a es **preimagen** de b y a su vez b o $f(a)$ es la **imagen** de a al ser procesada por f.

Otra manera de mostrar una función es mediante un diagrama llamado **sagital**, en donde se representan el conjunto de partida y el de llegada con flechas que relacionan cada **preimagen** con su respectiva **imagen**.



1.2. Dominio

Dada una función f de A en B se define matemáticamente el conjunto dominio $Dom(f)$ como:

$$f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longrightarrow & f(a) = b \end{array}$$

Entonces

$$Dom(f) = \{a \in A | \exists b \in B : f(a) = b\}$$

Lo cual se lee "$Dom(f)$ es igual al conjunto de todos los a en el conjunto A tal que existe un b en el conjunto B, de tal manera que $f(a) = b$". En otras palabras para $f(a) = b$ el dominio **son todos los valores que puede tomar** a en la función.

1.3. Recorrido o conjunto imagen

Es el conjunto de todas las imágenes de una función. Es un subconjunto del conjunto de llegada que denominamos anteriormente como **codominio** y por tal razón pueden ocurrir dos cosas:

- que el **recorrido** sea un conjunto más pequeño que el **codominio**.
- que el **recorrido** coincida completamente con el **codominio**.

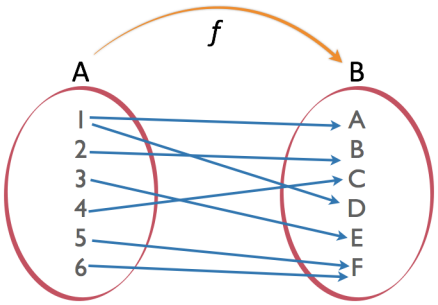
Matemáticamente el recorrido $Rec(f)$ se define como:

$$Rec(f) = \{b \in B : b = f(a) \quad \forall a \in A\}$$

Lo cual se lee "$Rec(f)$ es el conjunto de todos los b en el conjunto B tal que b es imagen de a, para todo a en el conjunto A."

✎ ***Ejemplo***

Determinar si el siguientes diagrama sagital representa una función.



Solución: Para que la relación f entre los conjuntos A y B sea una función debe cumplir con:

- Todos los elementos del conjunto de partida deben tener una imagen en el conjunto de llegada, es decir $Dom(f) = A$.
- Todo elemento del dominio posee una **única** imagen en el codominio.

La primera afirmación se cumple ya que todos los elementos del conjunto A tienen asociado un elemento en el conjunto B.

Respecto al segundo punto, el elemento 1 tiene asociado las imágenes a y d, lo cual no puede ocurrir para que una relación sea función.

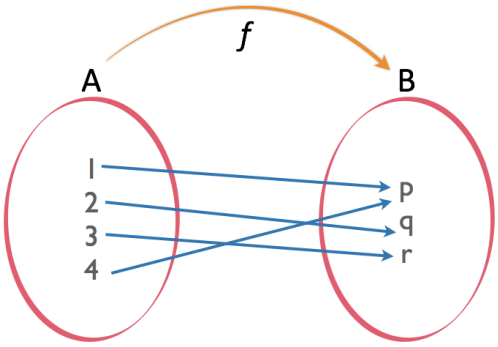
De acuerdo a lo anterior, el diagrama sagital no representa una función.

2. Clasificación de funciones

Podemos clasificar las funciones de manera general en base a la relación que existe entre el **dominio**, **codominio** y **recorrido**. Para esto consideremos una función f de A en B.

2.1. Epiyectiva o sobreyectiva

Llamamos a una función epiyectiva cuando todo elemento de B es imagen de algún elemento de A. Esto quiere decir que el **codominio es igual al recorrido**. Un ejemplo de diagrama sagital de una función epiyectiva es:

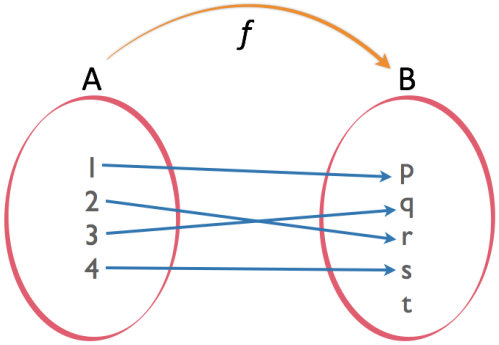


En lenguaje algebraico diremos que una función f de A en B es epiyectiva cuando:

$$Rec(f) = B$$

2.2. Inyectiva

Decimos que una función es inyectiva cuando cada elemento del recorrido es la imagen de sólo un elemento de A. En un diagrama sagital se caracteriza porque sólo llega una flecha a cada imagen.



Notar que no es necesario que el codominio sea igual al recorrido. A las funciones inyectivas también se les conoce como **funciones uno a uno**. En lenguaje algebraico diremos que una función f de A en B es inyectiva si:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

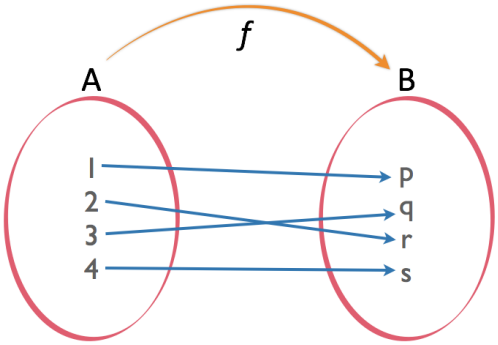
Dicho en sentido contrario:

$$f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x \neq y$$

En lenguaje cotidiano podríamos traducirlo de esta manera: "Si las imágenes de dos elementos a y b son iguales, entonces no queda otra que los elementos a y b sean iguales".

2.3. Biyectiva

Se denomina función biyectiva a la función que cumple con ser inyectiva y epiyectiva a la vez. Esto quiere decir que es **uno a uno** y que **todos** los elementos del codominio tienen preimagen. Una representación sagital posible es:



Algebraicamente diremos que una función es biyectiva si se cumple que:

- $Rec(f) = B$
- $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

2.4. ¿Cómo hallar el dominio y el recorrido de una función?

Cuando pensamos en buscar el dominio de una función, estamos pensando en **qué valores puede y no puede tomar** x. Para esto debemos fijarnos en los casos extremos, en dónde se indeterminan las funciones y cuándo los valores no pertenecen al conjunto $\mathbb{R}$. Por otro lado, cuando pensamos en el recorrido de una función estamos pensando en todos los valores que puede tomar $b = f(a)$. Veamos el siguiente ejemplo:

✎ ***Ejemplo***

1. *Dada la función real* $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   a) Determine $Dom(f)$.

   Solución: Notar que la función es real, eso quiere decir que va de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pero si $x = 0$, tendremos que

   $$f(x) = \frac{1}{x}$$
   $$f(0) = \frac{1}{0}$$

   Pero la división por cero no está definida, por lo tanto x no puede ser cero. Para los otros valores no hay problema, entonces:

   $$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

b) Determine $Rec(f)$.

Solución: Para saber qué valores no puede tomar $y = f(x)$ despejamos x.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ y &= \frac{1}{x} \\ xy &= 1 \\ x &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

De este resultado podemos notar que y no puede ser cero, ya que la expesión se indeterminaría, entonces:

$$Rec(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

2. *Dada la función real* $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

a) Deremine $Dom(g)$.

Solución: Nos debemos fijar en los valores para los que la expresión $\dfrac{1}{x-1}$ se indetermina. En el caso de las fracciones, éstas se indeterminan cuando el denominador es cero, entonces estamos buscando que:

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

El dominio de la función serán todos los reales menos el valor que indetermina la función:

$$Dom(g) = \mathbb{R} - \{1\}$$

b) Hallar $Rec(g)$.

Solución: Para esto despejamos x recordando que $g(x) = y$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x-1} \\ y &= \frac{1}{x-1} \\ y(x-1) &= 1 \\ x - 1 &= \frac{1}{y} \\ x &= \frac{1}{y} + 1 \\ x &= \frac{1+y}{y} \end{aligned}$$

Notar que y no puede ser cero, entonces

$$Rec(g) = \mathbb{R} - \{0\}$$

3. *Respecto a la función real* $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

   a) Determine $Dom(f)$.

   Solución: Las raices se indeterminan cuando la cantidad subradical es menor que cero. Entonces la función de indeterminará con todos los x para los cuales la cantidad subradical sea menor a cero.

$$x^2 - 1 < 0$$
$$x^2 < 1$$
$$\sqrt{x^2} < \sqrt{1}$$
$$|x| < 1$$

   No olvidemos que por definición la raíz cuadrada de un término al cuadrado es igual al valor absoluto del término. Además habíamos visto que:

$$|x| < a \Longrightarrow -a < x < a$$

   Aplicando a nuestro caso:

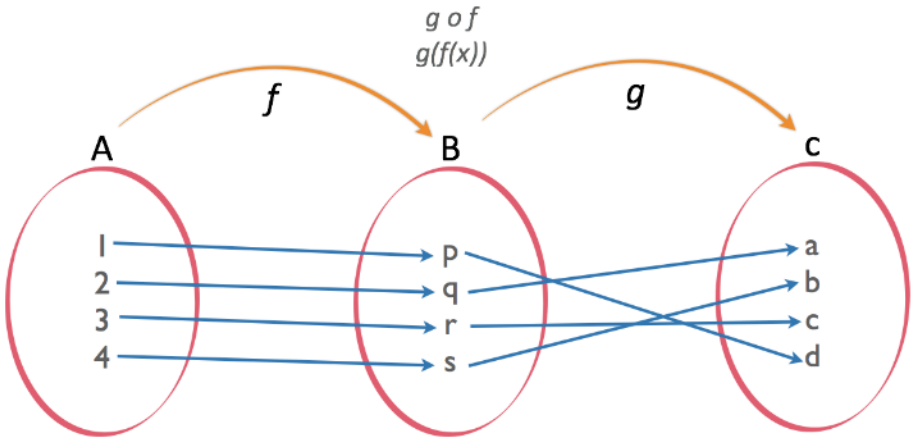
$$-1 < x < 1$$
$$]-1, 1[$$

   Para todos estos valores de x, la función se indetermina, por lo tanto, el dominio será igual a todos los reales que no pertenecen al intervalo $]-1, 1[$, es decir:

$$Dom(f) =]-\infty, -1] \cup [1, \infty+[$$

3. Composición de funciones

Retomando la analogía de las funciones como máquinas que tranforman los valores de entrada, la composición de funciones consistiría en agregar otra transformación al proceso. Por ejemplo, sea $f : A \longrightarrow B$ una función que procesa los elementos de A y los tranforma en elementos de B mediante una regla. Los valores de salida que entrega f podrían ser procesados por otra función $g : B \longrightarrow C$ que toma los elementos de salida de f y los lleva a un conjunto C mediante una transformación dada por g.



Sean A, B y C conjuntos no vacíos y consideremos las funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, denotamos a la función $g \circ f$ como aquella que toma los valores de $f(x)$ y los transforma por g, de tal manera que la podemos simbolizar de todas estas formas:

$$g \circ f = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) \qquad \forall x \in A$$

✎ ***Ejemplo***

1. *Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 3$ dos funciones reales.*

   a) Determinar $g \circ f$.

   Solución: Según la definición de composición $g \circ f = g\left(f(x)\right)$, tenemos:

$$\begin{aligned} g \circ f &= g\left(f(x)\right) \\ &= g\left(2x + 1\right) \\ &= (2x + 1)^2 + 3 \\ &= (2x)^2 + 2(2x) + 1^2 + 3 \\ &= 4x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

   b) Determinar $(f \circ g)(x)$.

   Solución: Según la definición:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f\left(g(x)\right) \\ &= f\left(x^2 + 3\right) \\ &= 2(x^2 + 3) + 1 \\ &= 2x^2 + 6 + 1 \\ &= 2x^2 + 7 \end{aligned}$$

   Con este ejemplo podemos notar que la composición de funciones **no es conmutativa**, es decir:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

   Pero la composición de funciones **sí es asociativa**, esto quiere decir que:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

   A continuación presentamos un ejemplo en donde se puede comprobar el comportamiento asociativo de la composición de funciones.

2. *Dadas las funciones reales* $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ *y* $h(x) = x + 2$

   a) Determinar $f \circ (g \circ h)$.

   Solución:

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h) &= f(g(h(x)) \\ &= f\left(g(x+2)\right) \\ &= f\left(2(x+2) - 3\right) \\ &= f(2x + 4 - 3) \\ &= f(2x + 1) \\ &= (2x+1)^2 + 2(2x+1) + 1 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 + 4x + 2 + 1 \\ &= 4x^2 + 8x + 4 \end{aligned}$$

   b) Determinar $(f \circ g) \circ h$.

   Solución:

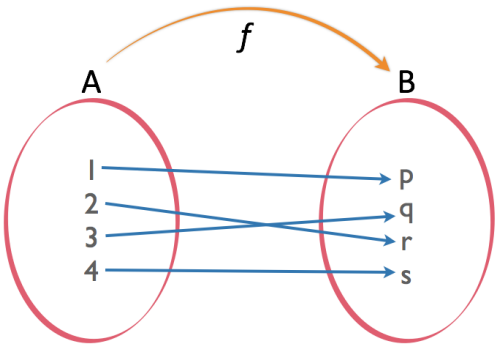
$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h &= f(g(x)) \circ h(x) \\ &= f(2x - 3) \circ h(x) \\ &= [(2x-3)^2 + 2(2x-3) + 1] \circ h(x) \\ &= [4x^2 - 8x + 4] \circ h(x) \\ &= [4x^2 - 8x + 4] \circ [x + 2] \\ &= 4(x+2)^2 - 8(x+2) + 4 \\ &= 4x^2 + 8x + 4 \end{aligned}$$

   Con este resultado hemos mostrado que la composición de funciones es asociativa.

---

4. Función inversa

Consideremos la función **biyectiva** $f : A \longrightarrow B$ como en el diagrama sagital.



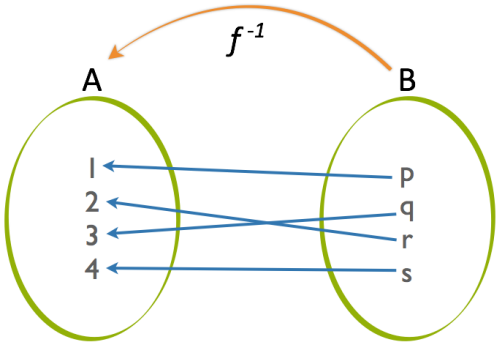
Fijemos la mirada en algún elemento de B como r. Notemos que existe un elemento x en A tal que $f(x) = r$, de hecho dicho elemento es 2:

$$f(2) = r$$

Para los demás elementos tenemos que

$$f(1) = p$$
$$f(2) = r$$
$$f(3) = q$$
$$f(4) = s$$

En base a lo anterior podemos definir una función denominada f^{-1} que busca las preimágenes de B según la función $f(x)$, es decir, para cada elemento y en B, esta función obtiene aquel x en A tal que $y = f(x)$. El diagrama sagital que describe tal situación para la función anterior es:



Algebraicamente la función inversa de:

$$f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longrightarrow & f(x) = y \end{array}$$

es

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ y & \longrightarrow & f^{-1}(y) = x \end{array}$$

En resumen $f^{-1}(y) = x$ sí y sólo si $y = f(x)$

4.1. ¿Cómo encontrar la función inversa de una función?

No toda función tiene una inversa, ya que para que exista tal función es necesario que ésta sea **biyectiva**. Veamos el siguiente ejemplo donde mostramos una técnica para hallar la función inversa.

✎ ***Ejemplo***

Dada la función $f(x) = 2x + 3$ *definida de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$

1. Encontrar $f^{-1}(x)$.

Solución: $f(x)$ es biyectiva[1]. Para encontrar f^{-1} primero despejamos x en función de $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 3 \\ y &= 2x + 3 \\ y - 3 &= 2x \\ \frac{y-3}{2} &= x \\ x &= \frac{y-3}{2} \end{aligned}$$

Por definición de la función inversa $x = f^{-1}(y)$ entonces,

$$\begin{aligned} x &= \frac{y-3}{2} \\ f^{-1}(y) &= \frac{y-3}{2} \end{aligned}$$

Con esto ya hemos encontrado la función inversa de f pero se acostumbra a nombrar por x a la variable de la función, por este motivo el segundo paso es renombrar la variable y por x.

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \frac{y-3}{2} \\ f^{-1}(x) &= \frac{x-3}{2} \end{aligned}$$

2. Hallar $f^{-1} \circ f$.

Solución:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= f^{-1}(f(x)) \\ &= f^{-1}(2x+3) \\ &= \frac{(2x-3)+3}{2} \\ &= \frac{2x-3+3}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

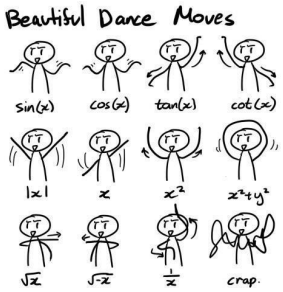
Entonces $f^{-1}(f(x)) = x$. Este resultado no es casualidad, de hecho se cumple para cualquier función con su función inversa.

Dada una función $f(x)$ biyectiva cualquiera y su función inversa $f^{-1}(x)$, entonces

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

[1] La demostración la dejamos como ejercicio.

5. Gráfica de una función



La gráfica de una función corresponde a la representación mediante una curva en el plano cartesiano. Dicha curva se compone de todos los pares ordenados (x, y) tales que $y = f(x)$. En lenguaje algebraico se escribe como:

$$\text{Curva} = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

Las gráficas son igual de importantes que sus formas algebraicas porque nos permiten apreciar el *comportamiento* de éstas, identificar si tienen alguna tendencia, dónde se intersectan, cúando son positivas, cuántas veces cruzan el eje X, el dominio y recorrido entre otras.

La gráfica de cada función la veremos en los capítulos correspondientes a ellas.

✍ *Ejercicios* 1

1. *Sea* $f(x) = 3x + 1$ *una función de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$.
   a) *Determinar* $Dom(f)$
   b) *Determinar* $Rec(f)$
   c) *Mostrar que* $f(x)$ *es inyectiva*
   d) *Mostrar que* $f(x)$ *es sobreyectiva*
   e) *Hallar* $f^{-1}(x)$
   f) *Verificar que* $f^{-1}(f(x)) = x$
2. *Sea* $f(x) = \dfrac{a}{1-x}$
   a) *Defina* $Dom(f)$ *en los reales*
   b) *Defina el recorrido de* $f(x)$ *en los reales*
   c) *Calcule* $f \circ f \circ f$
   d) *¿Es inyectiva la función?*
   e) *¿Es epiyectiva la función?*
   f) *¿Es biyectiva* $f(x)$*? y si lo es encuentre* $f^{-1}(x)$

Bibliografía

[1] Apuntes de Álgebra I, Tomo I, *Segunda edición 1993*, Facultad de Ciencias, USACH *Antonio Orellana Lobos.*

[2] Apuntes Álgebra, *Edición 2003*, Facultad de Ciencias, USACH *Ricardo Santander Baeza.*