open green road

Guía Matemática

COMBINATORIA

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

En distintas ocasiones se nos ha planteado que ordenemos y/o agrupemos un conjunto de determinados objetos. Generalmente, esto lo realizamos de tal forma que al ordenarlos o agruparlos una segunda vez vamos variando la posición de los objetos o los elementos que lo componen, pero ¿cuántas formas existen de ordenar los mismo objetos?, es decir, ¿en qué momento empiezo a repetir el orden de estos?

A partir de preguntas como las anteriores es que sale a la luz un tipo especial de proceso de contar. Este se presenta cuando queremos conocer el número de formas distintas en que se pueden agrupar y ordenar un conjunto de elementos bajo ciertas condiciones. A continuación estudiaremos tres maneras distintas de ordenar un determinado grupo de elementos a través de las permutaciones, los arreglos y las combinaciones.

1. Permutaciones ($\mathcal{P}$)

Las permutaciones consisten en ordenar un conjunto de elementos de todas las maneras posibles, de tal forma que si poseo 8 elementos entonces tengo 8 posiciones para ubicarlos. Por ejemplo, si tengo 3 copas de distintos color y las quiero ubicar en una línea recta sobre un estante, ¿de cuántas formas lo puedo realizar? Si hacemos las ordenaciones de forma explícita llegaremos a los siguientes 6 resultados posibles:



Si lo resolvemos de manera matemática debemos seguir el siguiente razonamiento: En la primera posición tengo 3 opciones de copas para poner, en la segunda posición las opciones se me redujeron en una unidad ya que una copa ya está ocupada en el primer puesto, por lo tanto tengo tan solo 2 opciones, finalmente en la última posición tengo una única opción. De esta forma la cantidad de permutaciones que puedo realizar con 3 elementos sera:

$$\mathcal{P}_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

En forma general, si tengo un conjunto con n elementos, el número de permutaciones o formas que puedo ordenarlos es igual a:

$$\mathcal{P}_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Para abreviar este número se ha adoptado la notación factorial, en donde el factorial de n, se escribe $n!$ y corresponde a la multiplicación de los enteros entre 1 y n éstos incluidos, es decir:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Desafío 1



Verificar la veracidad de la siguiente afirmación:

$$0! = 0$$

Respuesta

El número de ***permutaciones*** *posibles para un conjunto de n elementos es:*

$$\mathcal{P}_n = n!$$

Observación: Las expresiones trabajadas anteriormente corresponden a situaciones en donde los elementos no se pueden repetir.

✎ ***Ejemplo***

10.000 personas participaron de un concurso online realizado por la compañía "Vuela seguro". Si la empresa sorteaba unos pasajes dobles a España, Inglaterra, Canadá, Colombia, Cuba, Japón y Egipto, ¿de cuántas maneras posibles se pueden designar los premios a las 7 personas ganadoras?



Solución: En este caso nos están pidiendo repartir los 7 destinos de pasajes entre las 7 personas ganadoras, por lo tanto como nos estan pidiendo combinaciones ordenadas hacemos uso de las permutaciones. Como tenemos 7 ganadores y 7 destinos calculamos la $\mathcal{P}_7$:

$$\mathcal{P}_n = n!$$
$$\mathcal{P}_7 = 7!$$
$$\mathcal{P}_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$\mathcal{P}_7 = 5.040$$

Por lo tanto hay 5.040 posibilidades distintas de repartir los 7 destinos entre los ganadores del concurso online.

✍ ***Ejercicios*** ***1***

Resolver los siguientes ejercicios.

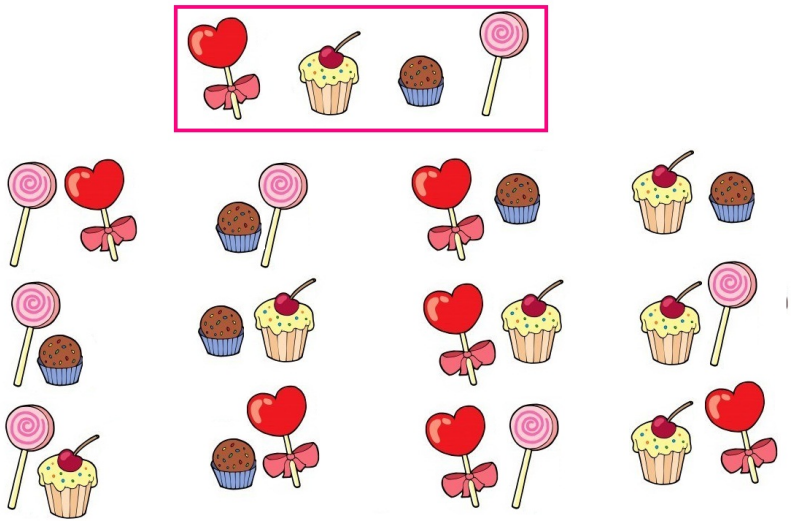
1. Determinar de cuantas formas distintas se pueden colocar 6 cajas de distintos colores apiladas en una esquina.
2. Un obrero compro 4 tarros de pintura de colores amarillo, blanco, naranjo y verde cada uno. Si tiene que pintar 4 habitaciones, la pieza matrimonial, el comedor, el lavadero y el baño, de un color cada uno. ¿De cuántas formas distintas se puede llevar a cabo el trabajo del obrero?

3. ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los primeros 5 números naturales si no se puede reiterar ningún digito?

---

2. Arreglos o Variaciones ($\mathcal{A}$)

Los arreglos o variaciones consisten en ordenar de todas las maneras posibles un conjunto de elementos sacados de un conjunto más grande, por lo tanto en este tipo de ordenación se tienen más elementos que lugares donde se pueden posicionar y por lo tanto la cantidad de posibles ordenamientos varía con respecto al caso visto anteriormente. Por ejemplo, si en una pastelería me ofrecen 4 tipos de dulces y quiero comprar dos distintos, ¿de cuántas maneras le puedo comunicar mi pedido al vendedor? Si realizamos las distintas forma de pedir los dos pasteles de manera explícita llegaríamos a que son 12 las posibles elecciones:



Lo cual no está mal, pero si nos hubieran ofrecido 20 pasteles y quisiéramos llevar sólo 2 gastaríamos mucho tiempo en realizar de manera gráfica los posibles pedidos. En base a lo anterior es que acudimos a las matemáticas para resolver el ejercicio. En el primer pedido puedo pedir 4 opciones de dulces y en el segundo puedo pedir 3 opciones de dulces ya que quiero llevar dos pasteles distintos, por lo tanto la cantidad de formas que puedo realizar mi pedido es:

$$\mathcal{A} = 4 \cdot 3 = 12$$

En forma general, el número de formas en que se pueden elegir un grupo de n elementos dentro de un conjunto de m elementos es:

$$\mathcal{A}_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Observación: Las expresiones trabajadas anteriormente corresponden a situaciones en donde los elementos no se pueden repetir, es decir, arreglos sin repetición. En caso de que los elementos elegidos en una primera instancia se pueden volver a elegir en una segunda o n-ésima instancia, entonces estamos frente a situaciones de arreglos con repetición en donde la expresión para calcular el número de conjuntos distintos formados por n elementos de los m dados está dado por: $\mathcal{A}_n^m = m^n$.

El número de **arreglos** *de n elementos tomados de un conjunto mayor de m elementos es:*

$$\mathcal{A}_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

✎ *Ejemplo*

En una carrera participan 20 corredores. ¿Cuántos resultados distintos podemos tener en los 3 primeros lugares

Solución: En este caso nos están pidiendo hacer conjuntos de 3 personas (n) de un total de 20 corredores (m). En este caso una persona no puede tener el primer y segundo lugar a la vez por lo tanto estamos frente a un problema de arreglo sin repetición.



$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n^m &= \frac{m!}{(m-n)!} \\
\mathcal{A}_3^{20} &= \frac{20!}{(20-3)!} \\
\mathcal{A}_3^{20} &= \frac{20!}{(17)!} \\
\mathcal{A}_3^{20} &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{(17)!} \\
\mathcal{A}_3^{20} &= 20 \cdot 19 \cdot 18 \\
\mathcal{A}_3^{20} &= 6.840
\end{aligned}$$

Finalmente hay 6.840 resultados distintos para los 3 primeros lugares de una carrera en que compiten 20 personas.

✍ *Ejercicios* 2

Resolver los siguientes ejercicios.

1. ¿Cuantos números de tres cifras diferentes se pueden formar con los dígitos $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?
2. ¿Cúantos números de dos cifras se pueden formar con los mismos dígitos?
3. En un juego una "mano" está compuesta por 4 cartas distintas. Si la baraja posee 40 cartas, ¿cuántas "manos" distintas me pueden entregar considerando el orden en que son entregadas?

---

3. Combinaciones ($\mathcal{C}$)

Las combinaciones consisten en formar subconjuntos con igual número de elementos pertenecientes a un conjunto mayor, de tal manera que **no importa el orden** en que son escogidos los elementos de los subconjuntos, por lo tanto dos grupos se consideran distintos si tienen al menos un elemento distinto. Por ejemplo, si una persona tiene en su bolsillo las 6 monedas chilenas actuales y saca 4 monedas, ¿cuántos montos de dinero distinto puede sacar de su bolsillo?. Realizando las combinaciones entre las monedas de forma gráfica obtenemos 15 combinaciones posibles.



Si lo resolvemos de manera matemática debemos seguir el siguiente razonamiento: Primero realizamos las variaciones de las 6 monedas en grupos de 4 siguiendo el método de las variaciones visto anteriormente:

$$\mathcal{A}_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!}$$
$$\mathcal{A}_4^6 = \frac{6!}{2!}$$
$$\mathcal{A}_4^6 = 360$$

Luego, como estamos trabajando con combinaciones el orden en que se sacan las monedas no importa ya que sacar las monedas $\{1, 5, 10, 50\}$ nos da un monto de \$66 lo cual es equivalente a sacar las mimas monedas en otro orden por ejemplo $\{10, 5, 1, 50\}$. De acuerdo a lo anterior tenemos que eliminar de nuestras variaciones las permutaciones entre las 4 monedas elegidas, por lo tanto el resultado que obtuvimos debemos dividirlo por 4! :

$$\mathcal{C}_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} : 4!$$
$$\mathcal{C}_4^6 = \frac{6!}{4!(6-4)!}$$
$$\mathcal{C}_4^6 = \frac{6!}{4! \cdot 2!}$$
$$\mathcal{C}_4^6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!}$$
$$\mathcal{C}_4^6 = \frac{30}{2}$$
$$\mathcal{C}_4^6 = 15$$

En forma general, el número de formas en que se pueden elegir un grupo de n elementos dentro de un conjunto de m elementos, sin que importe el orden, es:

$$\mathcal{C}_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Para abreviar este número se ha adoptado la siguiente notación:

$$\left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

En donde el símbolo corresponde al número de combinaciones de m sobre n o dicho de otra forma a la cantidad de combinaciones de m elementos tomados de n en n .

Desafío 2



¿Es correcta la expresión $\left(\begin{array}{c} m \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} m \\ m \end{array} \right)$?

Respuesta

Observación: En el caso de tener el número combinatorio de m sobre 1, el número será igual a m ya que tengo m posibilidades para elegir un elemento.

$$\left(\begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \right) = m$$

El número de ***combinaciones*** *de n elementos tomados de un conjunto mayor de m elementos, sin importar el orden es:*

$$\mathcal{C}_n^m = \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right)$$

✎ ***Ejemplo***

Un grupo de profesionales está compuesto por 10 periodistas, 8 ingenieros, 3 biólogos ambientales y 6 kinesiólogos. ¿De cuántas maneras posibles podemos organizar un grupo con 2 kinesiólogos, 5 periodistas, 1 biólogo ambiental y 6 ingenieros?

Solución: En esta situación da lo mismo el orden en que salen elegidos las personas para formar los grupos, por lo tanto tenemos que trabajar con combinaciones.

Lo primero que hay que notar es que cada una de las elecciones es independiente de la otra, por ejemplo elegir 2 kinesiólogos no me influye en elegir 6 ingenieros, por lo tanto debemos multiplicar entre sí las formas de poder elegir a cada profesional dentro de su grupo para obtener el número total de grupos que se pueden formar con las condiciones puestas. De esta manera tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{C} = \binom{10}{5} \cdot \binom{8}{6} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2}$$

$$\mathcal{C} = \frac{10!}{5!(10-5)!} \cdot \frac{8!}{6!(8-6)!} \cdot \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{6!}{2!(6-2)!}$$

$$\mathcal{C} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

$$\mathcal{C} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{3 \cdot 2!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!}$$

$$\mathcal{C} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\mathcal{C} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\mathcal{C} = 317.520$$

Por lo tanto hay 317.520 posibilidades distintas para formar grupos de trabajo con 2 kinesiólogos, 5 periodistas, 1 biólogo ambiental y 6 ingenieros.

✍ *Ejercicios* 3

Resolver los siguientes ejercicios.

1. Una mujer tiene 7 pulseras diferentes. ¿Cuántas posibles combinaciones tiene para su vestimenta?



2. A una junta de compañeros realizada después de 5 años de egresados de la universidad asisten 20 personas. Si al momento del brindis se intercambian abrazos entre todos, ¿cuántos abrazos se han intercambiado?

3. La nómina de la selección chilena de fútbol está compuesta por 2 arqueros, 8 defensas, 6 mediocampistas y 5 delanteros.

Nombre	Puesto
Miguel Ángel Pinto	Arquero
Cristopher Benjamín Toselli Ríos	Arquero
Arturo Erasmo Vidal Pardo	Defensa
Agustín Parra	Defensa
Carlos Labrín	Defensa
Lucas Domínguez	Defensa
Marcos González	Defensa
Eugenio Mena	Defensa
Osvaldo González	Defensa
Fernando Meneses	Defensa
Gary Alexis Medel Soto	Mediocampista
Braulio Leal	Mediocampista
Luis Pedro Figueroa	Mediocampista
Cristóbal Jorquera	Mediocampista
José Rojas	Mediocampista
Charles Aranguiz	Mediocampista
Eduardo Jesús Vargas Rojas	Delantero
Alexis Alejandro Sánchez Sánchez	Delantero
Humberto Andrés Suazo Pontivo	Delantero
Sebastián Pinto	Delantero
César Cortés	Delantero

¿De cuántas formas posibles podemos hacer un equipo con 1 arquero, 3 delanteros, 4 defensas y 3 mediocampistas?

Desafíos resueltos

✓ Desafío I: En el caso del factorial de cero, tenemos que $0! = 1$ ya que si poseemos 0 elementos hay exactamente una forma de ordenarlos correspondiente a no tomar ningún elemento. Volver

✓ Desafío II: En el caso de tener el número combinatorio de m sobre 0 o de m sobre m, éste será igual a 1 ya que hay una única forma de escoger 0 elementos, correspondiente a no elegir ninguno y hay una única forma de escoger los m elementos que sería escogiéndolos a todos. Por lo tanto la expresión es correcta e igual a 1.

$$\left(\begin{array}{c} m \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} m \\ m \end{array} \right) = 1$$

Volver

Bibliografía

[1] Manual de preparación PSU Matemática, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.