open green road

Guía Matemática

POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Introducción

Hemos escuchado muchas veces que una potencia es la multiplicación abreviada de un término por sí mismo un determinado número de veces, por ejemplo, a^5 significa que a se multiplica por sí mismo 5 veces.

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Todo bien si es un número natural, pero ¿cómo lo interpretamos si el denominador es 0, negativo, decimal o fraccionario? ¿tiene sentido decir que $a^{\frac{1}{2}}$ es multiplicar a por sí mismo $\frac{1}{2}$ de veces? Por situaciones como esta es que necesitamos expandir el concepto de potencia a los números racionales y aprender otras formas de interpretarlas.

2. Exponente cero

☞¡Mira!

La mayoría habrá escuchado la frase "cualquier cosa elevada a 0 es 1". Realmente esa frase no es del todo correcta y debería ser "cualquier expresión, distinta de cero, elevada a 0 es igual a 1". Pero ¿por qué sería cierta? Consideremos la siguiente división de una expresión algebraica por sí misma:

$$a^3 \div a^3$$

Sabemos de antemano que un elemento (distinto de cero) dividido por sí mismo es igual a 1, entonces:

$$a^3 \div a^3 = 1 \tag{1}$$

Pero aparte sabemos que cuando hay una división de potencias de igual base, sus exponentes se restan.

$$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0 \tag{2}$$

Igualando los resultados de (1) y (2) obtenemos que:

Para todo $a \neq 0$

$$a^0 = 1$$

3. Exponente negativo

El exponente negativo de una potencia tiene su origen en la división de potencias de igual base. En el caso que el exponente de la potencia del divisor sea **mayor** que el exponente de la potencia del dividendo, el resultado será una potencia con exponente negativo. Un ejemplo simple:

$$x^4 \div x^6 = x^{4-6} = x^{-2}$$

Para comprender cómo interpretar un exponente negativo veamos un caso general.

$$x^m \div x^{m+n}$$

Según la propiedad para la división de potencias de igual base:

$$\begin{aligned} x^m \div x^{m+n} &= x^{m-(m+n)} \\ &= x^{m-m-n} \\ &= x^{-n} \end{aligned} \tag{3}$$

Por otra parte, la división la podemos escribir como una fracción de la siguiente manera:

$$x^m \div x^{m+n} = \frac{x^m}{x^{m+n}}$$

En tal caso:

$$\begin{aligned} x^m \div x^{m+n} &= \frac{x^m}{x^{m+n}} \\ &= \frac{x^m}{x^m \cdot x^n} \\ &= \frac{1}{x^n} \end{aligned} \tag{4}$$

Los resultados de (3) y (4) son iguales a la misma expresión $x^m \div x^{m+n}$, por lo tanto, son equivalentes.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Toda cantidad elevada a un exponente negativo es igual a una fracción de numerador 1 y denominador igual a la cantidad pero con exponente positivo.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Dicho de otra manera, la expresión x^{-n} es igual al ***inverso multiplicativo*** *de x^n.*

✎ ***Ejemplo***

Reescribir la expresión $\dfrac{a^{-2}b^{-3}}{a^{-4}c^{-1}}$ con denominadores positivos.

Solución: Aplicando el significado del exponente negativo tendremos que la expresión la podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} \frac{a^{-2}b^{-3}}{a^{-4}c^{-1}} &= \frac{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{c}} \\ &= \frac{\frac{1}{a^2b^3}}{\frac{1}{a^4c}} \\ &= \frac{1}{a^2b^3} \cdot \frac{a^4c}{1} \\ &= \frac{a^4c}{a^2b^3} \\ &= \frac{a^2c}{b^3} \end{aligned}$$

Notar del ejemplo anterior que al "pasar" una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, el signo de la potencia se invierte. Ésta es una manera rápida de ver cómo reescribir una expresión con exponentes negativos a otra con exponentes positivos. El saber reescribir una expresión algebraica es una habilidad básica que sí o sí debemos dominar para evitar errores de procedimiento en la resolución de un problema.

✍ *Ejercicios* **1**

Reescribe las siguientes expresiones a exponentes positivos

1. $\dfrac{a^{-2}c}{b^3}$
2. $a^{-4}b^{-1}$
3. $\dfrac{3}{x^{-1}y^3}$
4. $4x^2y^{-5}$
5. $\dfrac{x^{-1}y^{-2}z^{-3}}{a^{-3}b^{-2}c^{-1}}$
6. $\dfrac{1}{2y^{-2}}$
7. $3a^{-2}b^3c^{-4}$
8. $x^{-\frac{1}{3}}y^{-3}$
9. $\dfrac{z^{-3}}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-2}}$

4. Potencias de exponente fraccionario y las raíces

Es común en Matemática tomar una expresión algebraica o aritmética y reescribirla de forma más simple. Para lograrlo a veces es necesario inventar notaciones y símbolos que mantengan la coherencia lógica y a la vez condensen información de forma simple. Veamos el siguiente problema:

$$x = \sqrt{3}$$

Si elevamos al cuadrado ambos términos de la igualdad obtenemos:

$$x^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

entonces

$$x^2 = 3$$

Para obtener x nos debemos preguntar **¿qué expresión al cuadrado da como resultado 3?** Podemos sospechar que debe ser una potencia de base 3 que al elevarla al cuadrado quede con exponente 1, es decir:

$$x = 3^{\text{ exponente desconocido}}$$

Llamemos y al exponente desconocido

$$x = 3^y \tag{5}$$

entonces la expresión anterior quedaría:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3 \\ (3^y)^2 &= 3 \\ 3^{2y} &= 3 \end{aligned}$$

Si lo desarrollamos un poco y recordamos que $3 = 3^1$ se obtiene

$$3^{2y} = 3^1$$

Para que esas potencias de igual base sean iguales no queda otra que sus exponente también lo sean, entonces:

$$\begin{aligned} 2y &= 1 \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

Reemplazamos (6) en (5)

$$x = 3^{\frac{1}{2}}$$

Notemos que el problema inicial es

$$x = \sqrt{3}$$

Por lo tanto si reemplazamos el valor obtenido para x obtenemos:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Por último no olvidemos que las raíces tienen un **índice** que en este caso es 2. Reescribiendo la expresión anterior con el exponente e índice tácitos:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3^1}$$

De esta manera encontramos una relación entre potencias racionales y las raíces.

La relación general entre raíces y potencias con exponente racional es:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

✎ ***Ejemplo***

Expresar con signo radical y exponente positivo.

1. $2m^{\frac{2}{5}}n^{\frac{3}{4}}$

   Solución: Escribimos cada potencia como raíz.

   $$2m^{\frac{2}{5}}n^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt[5]{m^2}\sqrt[4]{n^3}$$

2. $\dfrac{x^{\frac{3}{5}}}{y^{-\frac{2}{3}}}$

   Solución: Pasamos el denominador al numerador con signo opuesto en el exponente

   $$x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{3}}$$

   Ahora transformamos las potencias con exponente fraccionario a raíces.

   $$\sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^2}$$

No olvidemos todas las propiedades que conocemos sobre las potencias, éstas se aplican independientemente si la base es numérica o algebraica, o si el exponente de la potencia es entero, fraccionario o decimal. A continuación presentamos unos ejemplos en donde debemos aplicar las otras propiedades de potencias.

✎ ***Ejemplo***

1. *Expresar sin denominador*

   a) $\dfrac{3a^3b^2}{a^{-1}x}$

   Solución: Pasamos los términos del denominador al numerador.

   $$3a^3b^2ax^{-1}$$

   Ahora sumamos los exponentes de las potencias de igual base.

   $$3a^{3+1}b^2x^{-1} = 3a^4b^2x^{-1}$$

   b) $\dfrac{m^{-2}n^{-1}x^{-\frac{1}{2}}}{m^{-4}n^{-5}x^{-2}}$

   Solución: El procedimiento es igual al anterior, pero ahora tenemos exponentes fraccionarios. Primero pasamos los términos del denominador al numerador, invirtiendo el signo de su potencia.

   $$\begin{aligned}\frac{m^{-2}n^{-1}x^{-\frac{1}{2}}}{m^{-4}n^{-5}x^{-2}} &= m^{-2}m^4n^{-1}n^5x^{-\frac{1}{2}}x^2\\ &= m^{-2+4}n^{-1+5}x^{-\frac{1}{2}+2}\\ &= m^2n^4x^{\frac{-1+4}{2}}\\ &= m^2n^4x^{\frac{3}{2}}\\ &= m^2n^4\sqrt{x^3}\end{aligned}$$

2. *Expresar con exponentes positivos.*

   a) $\dfrac{3\sqrt[3]{m^2}}{5\sqrt[4]{n^{-3}}}$

   Solución: Usando la relación entre las potencias con exponente fraccionario y las raíces, escribimos las raíces como potencias.

   $$\frac{3m^{\frac{2}{3}}}{5n^{\frac{-3}{4}}}$$

   Pasamos los términos algebraicos del denominadora al denominador

   $$\frac{3}{5}m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{3}{4}}$$

b) $\sqrt[3]{m^{-4}}\sqrt{m^{-1}}$

Solución: Escribimos las raíces como potencias.

$$m^{\frac{-4}{3}} m^{\frac{-1}{2}}$$

Como las potencias tienen igual base sumamos sus exponentes.

$$\begin{aligned} m^{\frac{-4}{3}+\frac{-1}{2}} &= m^{\frac{-8}{6}+\frac{-3}{6}} \\ &= m^{\frac{-8+-3}{6}} \\ &= m^{-\frac{11}{6}} \end{aligned}$$

Como en el enunciado nos piden expresarlo como potencia de exponente positivo, debemos aplicar el concepto de potencia elevada a exponente negativo.

$$m^{-\frac{11}{6}} = \frac{1}{m^{\frac{11}{6}}}$$

✍ *Ejercicios* 2

Expresar con signo radical y exponentes positivos.

1. $\dfrac{1}{4x^{\frac{1}{3}}}$
2. $\dfrac{3x^{-\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$
3. $\dfrac{x^{\frac{2}{5}}}{y^{-\frac{2}{3}}}$
4. $x^{-3}m^{-2}n^{-\frac{3}{2}}$
5. $\left(y^{-\frac{1}{5}}\right)^2$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{5}{3}}$

4.1. Multiplicación y división de monomios con exponentes racionales

Como dijimos anteriormente, las propiedades para los exponentes en la multiplicación y división se aplican de igual forma si éstos son fraccionarios o negativos. Para comprenderlo mejor veamos una serie de ejemplos para monomios.

✎ *Ejemplo*

1. *Desarrolla las siguientes multiplicaciones*

a) a^2 por a^{-3}

Solución: Como las bases son iguales, simplemente sumamos los exponentes.

$$a^2 \cdot a^{-3} = a^{2+-3} = a^{-1}$$

b) x por $x^{\frac{1}{2}}$

Solución: Como las bases son iguales, simplemente sumamos los exponentes.

$$x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

c) Desarrolla las siguientes divisiones

d) $x^{-\frac{2}{3}}$ entre $x^{-\frac{4}{3}}$

Solución: Como las bases son iguales, simplemente restamos los exponentes.

$$\begin{aligned} x^{-\frac{2}{3}} \div x^{-\frac{4}{3}} &= x^{-\frac{2}{3}--\frac{4}{3}} \\ &= x^{-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} \\ &= x^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

e) $x^{-2}y^{-1}$ entre $x^{\frac{1}{3}}y^{-2}$

Solución: Como las bases son iguales, simplemente restamos los exponentes.

$$\begin{aligned} x^{-2}y^{-1} \div x^{\frac{1}{3}}y^{-2} &= x^{-2-\frac{1}{3}}y^{-1--2} \\ &= x^{\frac{-6-1}{3}}y^{-1+2} \\ &= x^{-\frac{7}{3}}y \end{aligned}$$

4.2. Multiplicación de polinomios con exponentes racionales

La multiplicación de polinomio por polinomio se hace término a término. Esto quiere decir que cada término de uno de los polinomios multiplica a cada uno de los términos del otro polinomio. A continuación ejemplificamos esta situación.

✎ ***Ejemplo***

Desarrolla la multiplicación de $2a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}$ *por* $a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}} + 1$

Solución: Desarrollamos la multiplicación término a término:

$$\begin{aligned} \left(2a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}} + 1\right) &= 2a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} - 2a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} + 2a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{4}} \\ &= 2a - 2a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} - a^{0} + a^{\frac{1}{4}} \\ &= 2a - 2a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{3}{4}} - 1 \end{aligned}$$

El resultado anterior podemos escribirlo con radicales:

$$2a - 2a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{3}{4}} - 1 = 2a - 2\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a^3} - 1$$

Es recomendable en estos ejercicios hacer todos los pasos de manera ordenada y sin apuro, ya que, por la cantidad de operaciones que debemos realizar es muy fácil equivocarse.

✍ ***Ejercicios*** **1**

Resuelve multiplicando o dividiendo dependiendo del caso.

1. $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{4}}$
2. $x^{-2} \times x^{-\frac{1}{3}}$
3. $a^{-1}b^{-2} \times ab^2$
4. $x^{-3}y^{\frac{1}{3}} \times x^{-2}y^{-\frac{1}{2}}$
5. $a^2 \div a^{-\frac{1}{2}}$
6. $x^{\frac{1}{3}} \div x$
7. $m^{\frac{2}{3}}n^{-\frac{1}{5}} \div m^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{3}}$
8. $4x^{\frac{2}{5}} \div 2x^{-\frac{1}{5}}$
9. $x^2 - 1 + x^{-2}$ por $x^2 + 2 - x^{-2}$
10. $a^{\frac{2}{3}} - 2 + 2a^{-\frac{2}{3}}$ por $3 + a^{-\frac{2}{3}} - 8a^{-\frac{4}{3}}$

Bibliografía

[1] Álgebra, *Edición 1983*, CODICE S.A. Madrid (1983)
Dr. Aurelio Baldor.

[2] Apuntes para la preparación de la PSU Matemática, *Segunda Edición, 2009*,
Pamela Paredes Núñez, Manuel Ramírez.