open green road



Guía Matemática

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Ecuación de segundo grado

Es una igualdad donde la variable incógnita está al cuadrado, la cual puede tener 2 soluciones diferentes, 1 solución o ninguna solución.

1.1. Completa

En su manera más completa la podemos escribir así

$$0 = ax^2 + bx + c$$

donde a, b, c son constantes que pertenecen a $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Las soluciones o **raíces** de una ecuacion de segundo grado se pueden hallar mediante las expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estos dos resultados se resumen así:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta expresión se conoce como **solución general** de la ecuación cuadrática. A la cantidad subradical $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** y se designa con la letra Δ. El discriminante Δ determina el número de soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

- Si $\Delta > 0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales diferentes. Esto se debe a que el término $\sqrt{\Delta}$ de la solución general existe.
- Si $\Delta = 0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales iguales. Esto se debe a que el término $\sqrt{\Delta}$ de la solución general se cancela.
- Si $\Delta < 0$ la ecuación cuadrática no tiene solución real. Esto se debe a que el término $\sqrt{\Delta}$ de la solución general no es un número real.

✎ ***Ejemplo***

1. *Hallar las soluciones de* $x^2 - 4x + 2 = 0$

   Solución: Considerando una ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -4$ y $c = 2$. Ahora aplicamos la solución general de la ecuación de segundo grado.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

   Las soluciones son $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ y $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

2. *¿Qué valores satisfacen la igualdad* $-4x^2 + 8 = 12x$*?*

Solución: Si queremos usar la solución general debemos reescribir la igualdad a una del tipo

$$0 = ax^2 + bx + c$$

Despejamos todo igualando a cero:

$$\begin{aligned} -4x^2 + 8 &= 12x \\ 0 &= 4x^2 + 12x - 8 \\ 0 &= 4(x^2 + 3x - 2) \\ 0 &= x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

En el último paso simplificamos la ecuación dividiento todos los términos por 4. Ahora los coeficientes son $a = 1$, $b = 3$ y $c = -2$, por lo tanto las soluciones son:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 8}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Las soluciones son $x_1 = \dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}$ y $x_2 = -\dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

1.1.1. Resolución mediante factorización

Las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse mediante la factorización de sus términos aplicando algún producto notable. Para entender el fundamento de este método estudiemos los siguientes ejemplos:

✎ ***Ejemplo***

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la factorización.

1. $x^2 + 2x + 1 = 0$

Solución: Notemos que $x^2 + 2x + 1$ corresponde al cuadrado de binomio de $x + 1$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x + 1)^2 &= 0 \\ (x + 1)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos un término, $x + 1$, que multiplicado por sí mismo es igual a cero, entonces no queda otra que ese término sea igual a cero.

$$x + 1 = 0$$

Despejando la incógnita obtenemos que $x = -1$.

2. $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solución: Nuestro objetivo es buscar una factorización para $x^2 - 5x + 6$. Notar que lo podemos factorizar de la forma $(x + a)(x + b)$ preguntándonos, ¿qué números multiplicados dan 6 y sumados -5? La respuesta es -2 y -3, por lo tanto la factorización será $(x - 2)(x - 3)$:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

Tenemos los términos $x - 2$ y $x - 3$ que multiplicados dan cero, y la única manera en que puede ocurrir eso es que al menos uno de ellos sea igual a cero.

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \iff x - 2 = 0 \text{ ó } x - 3 = 0$$

Si $x - 2 = 0$ enrtonces $x = 2$, pero si $x - 3 = 0$ entonces $x = 3$. Con esto hemos encontrado las dos soluciones para la ecuación de segundo grado anterior. La notación como conjunto solución es:

$$S = \{2, 3\}$$

1.2. Incompleta mixta

Se le denomina a una ecuación cuadrática del tipo

$$ax^2 + bx = 0$$

La solución de esta ecuación la podemos obtener con la expresión para la solución general de la ecuación completa, pero reemplazando $c = 0$. Otra manera de resolverla es factorizando por x.

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$

Como la multiplicación de x con $ax + b$ es igual a cero, entonces al menos uno de esos dos es igual a cero. La solución trivial de ecuación incompleta mixta es $x = 0$, la otra solución viene de suponer que $ax + b = 0$.

$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Las soluciones de una ecuación cuadrática incompleta mixta son $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{b}{a}$.

1.3. Incompleta pura

Es la ecuación cuadrática del tipo

$$ax^2 + c = 0$$

Las raíces de esta ecuación las podemos obtener con la expresión para la solución general de la ecuación completa, pero reemplazando $b = 0$. Otra manera de resolverla es despejar x.

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a} \\ x &= \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Las soluciones de una ecuación cuadrática pura son $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. La existencia de soluciones en los números reales depende de que c y a tengan signos opuestos, de lo contrario, el argumento de la raíz sería negativo.

2. Teorema de Cardano - Viète

Este teorema pone de manifiesto la relación que existe entre una ecuación y sus raíces o soluciones. Para una ecuación cuadrática del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con soluciones x_1 y x_2 se cumplirá que:

2.1. Suma de raíces

La suma de las raíces es $-\frac{b}{a}$, es decir:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2.2. Producto de raíces

La multiplicación de las raíces es igual a $\frac{c}{a}$, es decir:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

2.3. Construcción de binomio

Si conocemos las soluciones x_1 y x_2, entonces podemos hallar la ecuación cuadrática de la cual son solución escribiéndola como una factorización del tipo

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Si desarrollamos esta factorización tendremos que la ecuación cuadrática puede escribirse como:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

Entonces si sabemos cuanto suman y cual es el producto de las raíces, es muy fácil saber una ecuación que cumpla con esas características.

✎ ***Ejemplo***

1. *Hallar una ecuación cuadrática tal que la suma de sus raíces sea* $-\frac{1}{2}$ *y el producto 6.*

   Solución: Estamos pensando en una ecuación cuadrática del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, por lo que debemos hallar los coeficientes a, b y c. Sabemos por el teorema de Cardano - Viète que la suma de las raíces de una ecuación cuadrática es:

   $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

   Y la multiplicación de las soluciones:

   $$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

   Del enunciado nos dicen que:

   $$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$$

   por lo tanto

   $$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$$

   de lo que podemos desprender que

   $$a = 2b$$

   Escrito de otra manera:

   $$b = \frac{a}{2}$$

   Como la multiplicación de las raíces es 6, podemos decir que:

   $$\frac{c}{a} = 6$$

   entonces

   $$c = 6a$$

   Si reemplazamos los valores obtenidos para a, b y c en $ax^2 + bx + c = 0$ se obtiene:

   $$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ ax^2 + \left(\frac{a}{2}\right)x + (6a) &= 0 \\ a\left[x^2 + \frac{1}{2}x + 6\right] &= 0 \end{aligned}$$

   Como $a \neq 0$ podemos simplificar por a la ecuación:

   $$x^2 + \frac{1}{2}x + 6 = 0$$

   Así encontramos la función cuadrática más simple que cumple con lo pedido, pero exiten infinitas funciones cuadráticas en donde las raíces suman $-\frac{1}{2}$ y su producto es 6, todo depende del valor de a que queramos dar en $ax^2 + \frac{a}{2}x + 6a = 0$.

2. *¿Qué ecuación cuadrática tiene por suma de sus raíces -10 y el producto es -24?*

   Solución: El último resultado del teorema de Cardano - Viète dice que para las soluciones x_1 y x_2 se cumplirá que:

   $$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

   Conocemos la suma ($x_1 + x_2 = -10$) y la multiplicación de las raíces ($x_1 \cdot x_2 = -24$), entonces una ecuación cuadrática que cumple con el enunciado es:

   $$x^2 + 10x - 24 = 0$$

   Pero no es la única, ya que podemos amplificar los términos de la ecuación y las soluciones serán las mismas. Por ejemplo, si amplificamos por -1 se obtiene:

   $$-x^2 - 10x + 24 = 0$$

   Esta ecuación también cumple con que sus soluciones sumadas dan -10 y la multiplicación es -12.

3. Si se sabe que una de las soluciones de $x^2 = -9x + 50 - k$ es $x_1 = 3$, ¿Cuál es el valor de la constante k para que ésto sea cierto?

   Solución: Primero ordenamos la ecuación:

   $$x^2 + 9x + k - 50 = 0$$

   Del teorema de Cardano - Viète sabemos que la ecuación cuadrática donde x_1 y x_2 son soluciones es:

   $$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

   Si aplicamos esto a la ecuación del problema obtenemos que:

   $$-(x_1 + x_2) = 9$$

   y además

   $$x_1 \cdot x_2 = k - 50$$

   En el enunciado nos dicen que una solución es $x_1 = 3$. Reemplazamos esto en la primera igualdad:

   $$\begin{aligned} -(x_1 + x_2) &= 9 \\ -(3 + x_2) &= 9 \\ 3 + x_2 &= -9 \\ x_2 &= -12 \end{aligned}$$

   Sabiendo que $x_1 = 3$ y $x_2 = -12$ resolvemos la segunda igualdad para depsejar k:

   $$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= k - 50 \\ 3 \cdot (-12) + 50 &= k \\ -36 + 50 &= k \\ 14 &= k \end{aligned}$$

   Finalmente encontramos que $k = 14$.

✍ ***Ejercicios*** **1**

1. *Sabiendo que para la ecuación* $ax^2+bx+c=0$ *las soluciones están dadas por* $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, *muestre que:*

   a) $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ *b*) $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

2. *Utilice la factorización con productos notables para hallar la solución de cada ecuación cuadrática.*

   a) $x^2-2x+1=0$ *d*) $x^2+4x=-4$ *g*) $9-6x=-x^2$
   b) $x^2+7x+6=0$ *e*) $-x^2=7x+10$ *h*) $x^2=-\sqrt{8}x-2$
   c) $2x^2+14x+20=0$ *f*) $x^2=5x+36$ *i*) $x^2+\sqrt{12}x=-3$

3. Hallar una ecuación cuadrática del tipo $ax^2+bx+c=0$ que cumpla las siguientes características:

   a) Sus raíces son -5 y 4
   b) Las raíces suman $-\dfrac{1}{2}$ y su producto es -12

4. ¿Cuál es el producto de las raíces de la ecuación $-2x^2+3x-5$?

5. ¿Cuántas soluciones reales diferentes tiene la ecuación x^2+x+30?

Bibliografía

[1] Apuntes de Álgebra I, Tomo I, *Segunda edición 1993*, Facultad de Ciencias, USACH *Antonio Orellana Lobos.*

[2] Apuntes Álgebra, *Edición 2003*, Facultad de Ciencias, USACH *Ricardo Santander Baeza.*