open green road

Guía Matemática

CUERPOS GEOMÉTRICOS

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

1. Geometría en el espacio



Al observar nuestro alrededor podemos notar una infinidad de objetos que ocupan un lugar en el espacio físico en el cual nos desenvolvemos. Cada uno de estos posee un largo, un alto y un ancho determinado, es decir, tienen tres dimensiones. De acuerdo a lo anterior, todo lo que percibimos son seres y objetos tridimensionales.

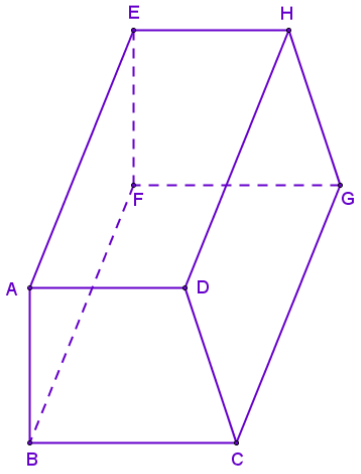
A continuación estudiaremos los **cuerpos geométricos** que corresponden a aquellos objetos tridimensionales con algunas características particulares que nos hacen más fácil su estudio, como por ejemplo, aquellos cuerpos que están compuestos por polígonos iguales, como lo es un dado, o aquellos cuerpos que son completamente redondos, como lo es una bola de billar.

*Un **cuerpo geométrico** es un sólido, que ocupa un lugar en el espacio, limitado por una o más superficies.*

Los cuerpos geométricos los podemos clasificar en **poliedros** o **cuerpos redondos** de acuerpo a la naturaleza de sus caras. A continuación estudiaremos cada uno de ellos por separado.

2. Los Poliedros

Un poliedro es un cuerpo geométrico que está delimitado por superficies planas en forma de polígonos. Dentro de los elementos que podemos destacar en estos cuerpos se encuentran:



- **Caras:** Son las superficies poligonales planas que limitan al poliedro. En la figura una de las 6 caras del poliedro es el trapecio $ABCD$.
- **Aristas:** Son los lados de los polígonos que forman al poliedro. Hay que tener en cuenta que siempre dos caras van a tener una arista en común correspondiente a la intersección de ambas superficies. En la figura una de las 12 aristas del poliedro es el segmento BC.
- **Vértices:** Son el punto de intersección de dos aristas. En la figura uno de los 8 vértices del poliedro corresponde al punto A.
- **Diagonales:** Son los segmentos que unen dos vértices del poliedro situados en diferentes caras. En la figura una de las 4 diagonales del poliedro es el segmento AG.
- **Planos diagonales:** Son los planos formados por cuatro vértices del poliedro en donde sólo dos de ellos pertenecen a la misma cara. En la figura uno de los 4 planos diagonales es el formado por los puntos A, D, F y G.
- **Ángulos diedros:** Son los formados por dos caras contiguas de tal forma que comparten una arista. En la figura uno de los 12 ángulos diedros que posee el poliedro es el ángulo formado entre las caras $ABCD$ y $CDHG$.

- **Ángulos poliédricos:** Son los formados por tres o más caras que comparten un mismo vértice. En la figura uno de los 8 ángulos poliédricos que posee el poliedro es el ángulo formado por las caras $ABCD$, $CDHG$ y $ADHE$.

2.1. Clasificación de los poliedros

Los poliedros los podemos clasificar bajo 3 diferentes criterios:

2.1.1. Número de caras

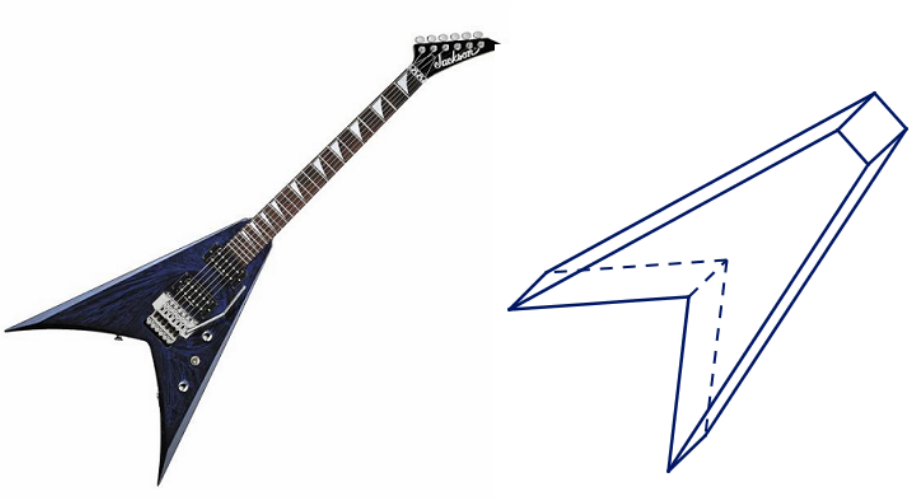
La siguiente tabla nos muestra cómo se identifica a cada poliedro de acuerdo al número de caras que posee el cuerpo geométrico.

Número de caras	Nombre
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Endecaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro

2.1.2. Medida de los ángulos diedros

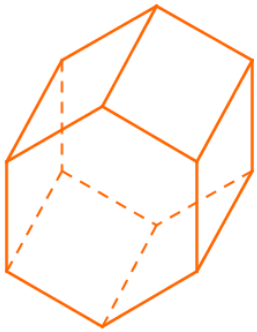
Los poliedros se pueden clasificar en dos categorías de acuerdo a la medida que posean sus ángulos diedros.

- **Poliedros cóncavos:** Son aquellos cuerpos geométricos que poseen al menos un ángulo diedro mayor que 180°.



- **Poliedros convexos:** Son aquellos cuerpos geométricos que poseen todos sus ángulos diedros menores que 180°.





De ahora en adelante cuando hablemos de poliedros haremos referencia a los poliedros convexos a no ser que se indique lo contrario.

Desafío 1



¿Qué sucede si trazamos una recta por dos puntos cualesquiera del interior de un poliedro cóncavo y de un poliedro convexo?

Respuesta

2.1.3. Congruencia de las caras y de los ángulos diedros

Los poliedros los podemos clasificar en dos categorías de acuerdo a la congruencia que presentan algunos de sus elementos.

- **Poliedros Regulares:** Son aquellos cuerpos geométricos cuyas caras corresponden a polígonos regulares congruentes entre sí y cuyos ángulos diedros poseen todos la misma medida.

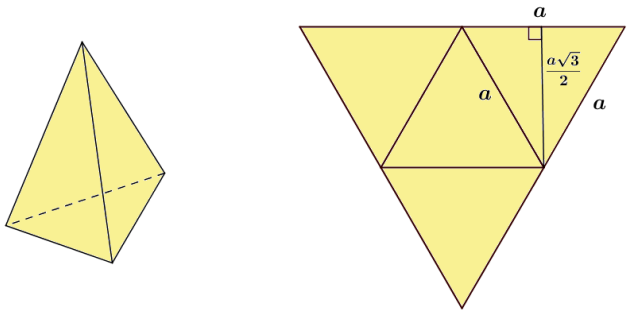
A partir del **teorema de Euler** que cumplen todos los poliedros se puede deducir que existen sólo 5 poliedros regulares. Euler demostró en 1752 que al sumar el número de caras y el número de vértices de un poliedro, y al resultado, restarle el número de aristas de éste, se obtiene siempre el número 2.

$$\text{N° Caras} + \text{N° Vértices} - \text{N° Aristas} = 2$$

Con la ayuda del descubrimiento de Euler se llego a que los 5 poliedros regulares son:

1. **Tetraedro:** El tetraedro es un cuerpo geométrico que está formado por 4 triángulos equiláteros congruentes, 4 vértices, 4 ángulos triedros, 6 aristas y 6 ángulos diedros.

Para determinar la medida de la **superficie total** de este cuerpo geométrico debemos calcular el área de cada una de sus caras triangulares y luego sumarlas. Basándonos en la red[1] del poliedro obtenemos la siguiente expresión para la superficie de un tetraedro regular de lado a:



$$\text{Á}_{\text{tetraedro}} = 4 \cdot \text{Á}_{\text{triángulo equilátero}}$$

$$\text{Á}_{\text{tetraedro}} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Á}_{\text{tetraedro}} = a^2\sqrt{3}$$

Desafío 2

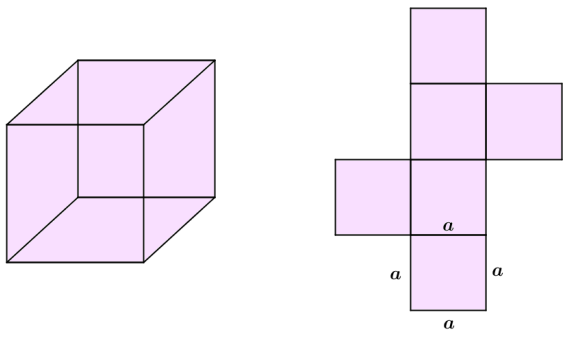


¿Por qué al juntar exactamente por sus bases dos tetraedros regulares iguales no se forma un poliedro regular?

Respuesta

2. **Hexaedro o Cubo:** El cubo es un cuerpo geométrico que está formado por 6 cuadrados congruentes, 8 vértices, 8 ángulos triedros, 12 aristas y 12 ángulos diedros.

   Para determinar la medida de la **superficie total** del cubo, al igual que con el cuerpo anterior, debemos calcular el área de cada una de sus caras y luego sumarlas. Basándonos en los datos entregados por la red de este poliedro regular obtenemos la siguiente expresión para la superficie de un cubo de lado a:



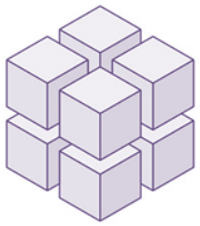
[1] La red de un cuerpo geométrico es una figura plana que al momento de recortarla y armarla convenientemente se obtiene el cuerpo geométrico.

$$\text{Á}_{\text{cubo}} = 6 \cdot \text{Á}_{\text{cuadrado}}$$
$$\text{Á}_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2$$

$$\boxed{\text{Á}_{\text{cubo}} = 6a^2}$$

Como estamos trabajando con cuerpos tridimensionales, es que en algunas situaciones resulta importante determinar el espacio que el cuerpo ocupa en el espacio, es decir su **volumen**. Así, al igual que lo hicimos con el cálculo de áreas de figuras planas, para determinar el volumen de un cuerpo geométrico debemos calcular cuántas veces un cubo unitario de lado 1 cabe dentro de nuestro cuerpo.
Recordemos que las medidas métricas del volumen es el metro cúbico [m^3] junto con sus respectivos múltiplos y submúltiplos. Esta unidad de medida corresponde a un cubo cuya arista mide 1 unidad de longitud y cuyo volumen es 1.

En base a lo anterior, para determinar el volumen de un cubo cuya arista mide 2 debemos calcular cuántas veces entra un cubo unitario de lado 1 dentro del cuerpo geométrico. De esta forma, al dividir el cubo obtenemos que el volumen es 8 ya que el cubo unitario cabe 8 veces. Este número corresponde a la multiplicación de las medidas tridimensionales del cubo, es decir, su largo por su ancho por su alto.



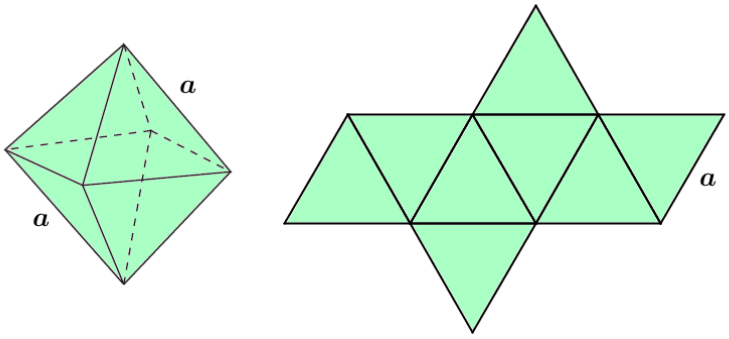
En general, la expresión que me permite calcular el volumen de un cubo de arista a es:

$$\text{V}_{\text{cubo}} = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}$$
$$\text{V}_{\text{cubo}} = a \cdot a \cdot a$$

$$\boxed{\text{V}_{\text{cubo}} = a^3}$$

3. **Octaedro:** El octaedro es un cuerpo geométrico que está formado por 8 triángulos equiláteros congruentes, 6 vértices, 6 ángulos tetraedros, 12 aristas y 12 ángulos diedros.

   Para determinar la medida de la **superficie total** de este cuerpo geométrico debemos calcular el área de las 8 caras triangulares y luego sumarlas. Basándonos en los datos de la red del poliedro regular obtenemos la siguiente expresión para la superficie de un octaedro regular de lado a:

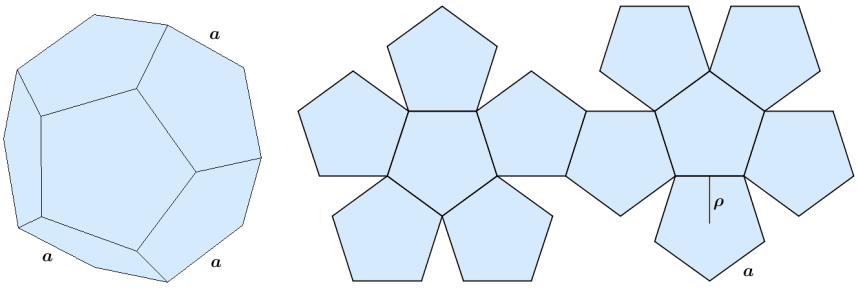


$$\text{Á}_{\text{octaedro}} = 8 \cdot \text{Á}_{\text{triángulo equilátero}}$$
$$\text{Á}_{\text{octaedro}} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$\text{Á}_{\text{octaedro}} = 2 \cdot a^2\sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{Á}_{\text{octaedro}} = 2a^2\sqrt{3}}$$

4. **Dodecaedro:** El dodecaedro es un cuerpo geométrico que está formado por 12 pentágonos regulares, 20 vértices, 20 ángulos poliedros, 30 aristas y 30 ángulos diedros.

   Para determinar la medida de la **superficie total** de este cuerpo geométrico debemos calcular el área de las 12 caras pentagonales y luego sumarlas. Basándonos en los datos de la red del poliedro regular obtenemos la siguiente expresión para la superficie del dodecaedro regular de lado a y apotema ρ:

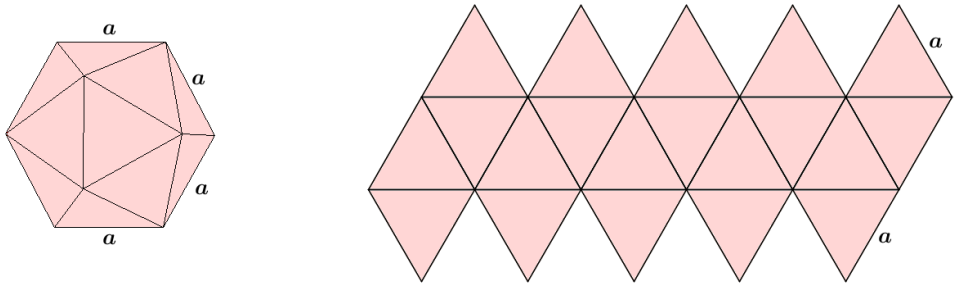


$$\text{Á}_{\text{dodecaedro regular}} = 12 \cdot \text{Á}_{\text{pentágono regular}}$$
$$\text{Á}_{\text{dodecaedro regular}} = 12 \cdot \frac{5 \cdot a \cdot \rho}{2}$$
$$\text{Á}_{\text{dodecaedro regular}} = 30 \cdot a \cdot \rho$$

$$\boxed{\text{Á}_{\text{dodecaedro regular}} = 30 \cdot a \cdot \rho}$$

5. **Icosaedro:** El icosaedro es un cuerpo geométrico que está formado por 20 triángulos equiláteros, 12 vértices, 12 ángulos pentaedros, 30 aristas y 30 ángulos diedros.

   Para determinar la medida de la superficie total de este cuerpo geométrico debemos calcular el área de las 20 caras triangulares y luego sumarlas. Basándonos en los datos de la red del poliedro regular obtenemos la siguiente expresión para la superficie del icosaedro regular de lado a:

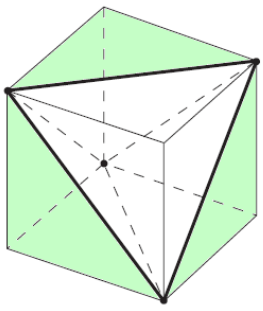


$$\text{Á}_{\text{icosaedro regular}} = 20 \cdot \text{Á}_{\text{triángulo equilátero}}$$
$$\text{Á}_{\text{icosaedro regular}} = 20\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$\text{Á}_{\text{icosaedro regular}} = 5 \cdot a^2\sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{Á}_{\text{icosaedro regular}} = 5 \cdot a^2\sqrt{3}}$$

✎ ***Ejemplo***

1) *En un cubo de arista 2[cm] se inscribe un tetraedro regular como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es el área total del tetraedro?*



Solución: Como el tetraedro regular está inscrito en el cubo tenemos que la medida de las aristas es equivalente a la medida de la diagonal de una de las caras del cubo. Si d corresponde a la diagonal de una de las caras del cubo y a corresponde a la arista del cubo entonces por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2^2 + 2^2$$
$$d^2 = 8$$
$$d = 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto la diagonal del cubo mide $2\sqrt{2}$[cm] y en consecuencia el lado del tetraedro regular mide lo mismo. De acuerdo a lo anterior el área del tetraedro regular es:

$$\text{Á}_{\text{tetraedro regular}} = a^2\sqrt{3}$$
$$\text{Á}_{\text{tetraedro regular}} = (2\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}$$
$$\text{Á}_{\text{tetraedro regular}} = 8\sqrt{3}$$

Finalmente el área del tetraedro regular inscrito en un cubo de arista 2[cm] es igual a $8\sqrt{3}$[cm^2].

✍ *Ejercicios* **1**

Resolver los siguientes ejercicios.

1. ¿Qué sucede con el área total de los poliedros regulares si se duplica la longitud de todas sus aristas?
2. Se tiene un dodecaedro regular cuya apotema de una cara lateral mide 4[mm] . ¿Cuál es el área total del dodecaedro regular si su arista mide 6[mm]?
3. Se tiene un cubo de arista 9[cm] . Calcular:
   a) La diagonal de una de sus caras.
   b) La diagonal del cubo.
   c) El área total del cubo.
4. Si la área total de un tetraedro regular es $180\sqrt{3}$[m^2] . Calcular:
   a) La arista del tetraedro regular.
   b) El área de una de sus caras.
5. La altura de una de las caras de un icosaedro regular mide 15[mm] . Calcular:
   a) La arista del icosaedro regular.
   b) El área total del cuerpo geométrico.
6. El área de una de las caras de un octaedro regular mide $20\sqrt{3}$[dm^2] . Calcular:
   a) La arista del cuerpo geométrico.
   b) El área total del cuerpo geométrico.
   c) El volumen del octaedro regular.

- **Poliedros Irregulares:** Son aquellos cuerpos geométricos cuyas caras no son todas polígonos regulares congruentes entre sí, vale decir, las caras poligonales pueden presentar distinta forma. A continuación estudiaremos los poliedros irregulares más comunes que son los prismas y las pirámides.

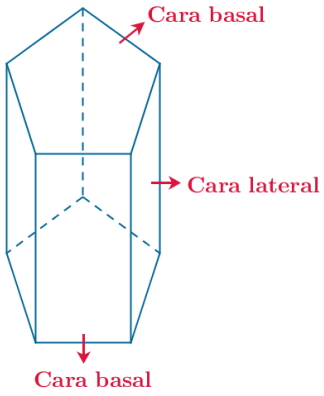


El Pentágono



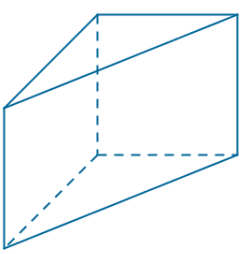
Museo del Louvre

1. **Prisma:** Es el poliedro que está formado por dos poligonos congruentes y paralelos entre sí (caras basales), y por tantos paralelogramos como lados tiene una cara basal (caras laterales).

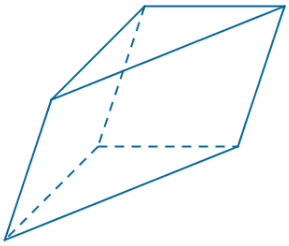


Los prismas se pueden clasificar en dos categorías de acuerdo a las siguientes características:

- **Prisma oblicuo:** Es aquel prisma en que las aristas laterales no son perpendiculares a las caras basales.
- **Prisma recto:** Es aquel prisma en que las aristas de las caras laterales son perpendiculares a las caras basales. En adelante, cuando hablemos de prismas haremos referencia a un prisma recto a no ser que se indique lo contrario.



Prisma Recto



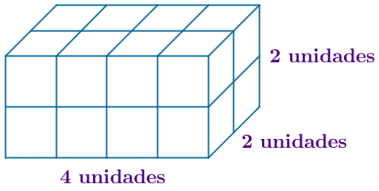
Prisma Oblicuo

Área y volumen de un prisma

Como vimos anteriormente, la cantidad de caras que tienen los primas depende de la forma poligonal de las dos caras basales que este cuerpo geométrico posea, por lo tanto, en esta ocasión no entregaremos una expresión general para calcular la medida de la **superficie** de un prisma ya que dependerá de su forma. Sin embargo hay que recordar que para determinar el área total basta con sumar el área de cada una de las caras del cuerpo geométrico.

Ahora bien, para determinar el **volumen** de cualquier prisma analizaremos en una primera instancia como calcular el volumen de un prisma rectangular y un prisma triangular para luego llegar a una expresión general.

- **Prisma de base rectangular:** Al igual que con el caso del cubo visto anteriormente, para determinar el espacio que ocupa un prisma rectangular en el espacio debemos determinar cuántos cuadrados unitarios caben en su interior.
  Por ejemplo, si tenemos un prisma de base rectangular cuyas medidas son 4 unidades de largo, 2 unidades de ancho y 2 unidades de alto, obtenemos que su volumen es de 16 unidades cúbicas ya que caben en su interior 16 cubos unitarios.

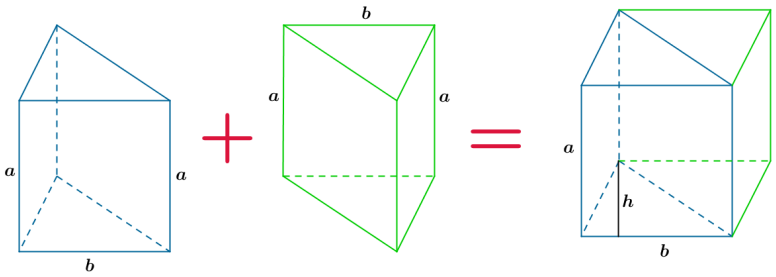


$$
\begin{aligned}
V_{\text{prisma rectangular}} &= 16 \\
V_{\text{prisma rectangular}} &= 4 \cdot 2 \cdot 2 \\
V_{\text{prisma rectangular}} &= \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto} \\
V_{\text{prisma rectangular}} &= Á_{\text{rectángulo}} \cdot \text{alto} \\
V_{\text{prisma rectangular}} &= Á_{\text{basal}} \cdot \text{alto}
\end{aligned}
$$

El número recién obtenido corresponde a la multiplicación de las tres medidas tridimensionales del prisma, lo que a su vez corresponde a la multiplicación del área basal del prisma rectangular

por su altura. Esta expresión se puede generalizar para el caso de cualquier paralelepípedo [2] ya que cualquiera de estos cuerpos se puede transformar en un prisma de base rectángular.

- **Prisma de base triangular:** Para determinar el volumen de un prisma de base triangular lo que debemos hacer es transformarlo a un cuerpo geométrico ya conocido. En la siguiente figura se muestra como se transforma un prisma triangular de altura a en un paralelepípedo al adjuntarle un prisma con las mismas medidas:



De acuerdo a la figura anterior tenemos que el volumen de un prisma de base triangular corresponde a la mitad del volumen que ocupa un paralelepípedo con las mismas medidas tridimensionales, por lo tanto de acuerdo a los datos entregados por la figura tenemos que el volumen del prisma triangular es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{\text{prisma triangular}} &= \frac{\mathrm{V}_{\text{paralelepípedo}}}{2} \\
\mathrm{V}_{\text{prisma triangular}} &= \frac{\text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}}{2} \\
\mathrm{V}_{\text{prisma triangular}} &= \frac{\mathrm{b} \cdot \mathrm{h}}{2} \cdot a \\
\mathrm{V}_{\text{prisma triangular}} &= \acute{\mathrm{A}}_{\text{triángulo}} \cdot \text{alto} \\
\mathrm{V}_{\text{prisma triangular}} &= \acute{\mathrm{A}}_{\text{basal}} \cdot \text{alto}
\end{aligned}$$

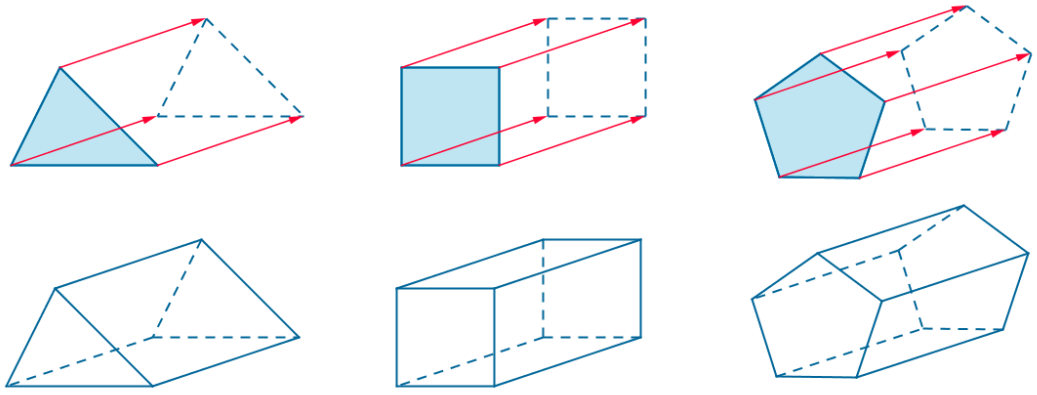
De acuerdo a los dos casos vistos anteriormente podemos decir que el volumen de cualquier prisma es equivalente a la multiplicación de su área basal por su altura ya que todo prisma se puede transformar en un prisma rectangular.

$$\mathrm{V}_{\text{prisma}} = \acute{\mathrm{A}}_{\text{basal}} \cdot \text{altura}$$

Cuerpos generados por traslación de figuras planas

Los prismas son cuerpos geométricos que se forman por la traslación de una superficie plana. La siguiente imagen muestra 3 figuras planas que se trasladan apoyadas sobre uno de sus lados en un plano perpendicular a ellas de tal forma que dan origen a distintos prismas rectos.

[2] Prisma cuyas caras basales son paralelogramos.



Prisma triangular | Prisma cuadrangular | Prisma pentagonal

✎ ***Ejemplo***

1. *Una caja de pañuelos tiene la forma de un prisma hexagonal regular recto. ¿Cuál es el área total y volumen del cuerpo geométrico si el lado del hexágono regular mide 4[cm] y la altura del prisma mide el triple que una arista basal?*

Solución: La base de la caja de pañuelos corresponde a un hexágono regular cuyo lado mide 4[cm] y cuya apotema mide $2\sqrt{3}$[cm] por ser la altura de un triángulo equilátero de lado 4[cm]. Sabemos además que la altura del prisma es tres veces el lado del hexágono regular, por lo tanto mide 12[cm]. Con estos datos calculamos el volumen del prisma de la siguiente manera:

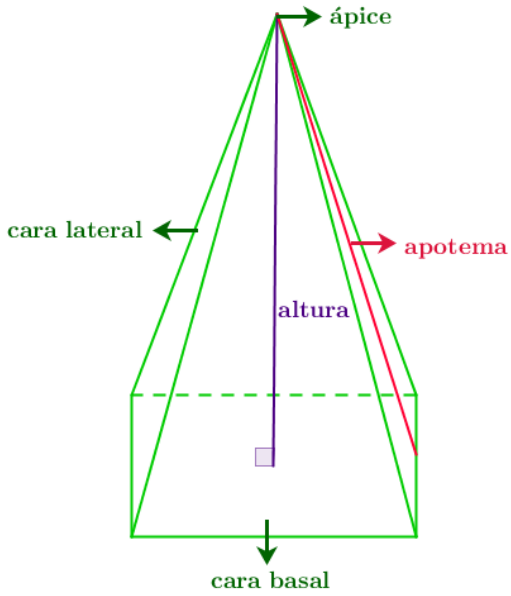
$$V_{\text{prisma}} = \text{Á}_{\text{basal}} \cdot \text{altura}$$
$$V_{\text{prisma}} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6}{2} \cdot 12$$
$$V_{\text{prisma}} = 24\sqrt{3} \cdot 12$$
$$V_{\text{prisma}} = 288\sqrt{3}$$

Finalmente el volumen de la caja de pañuelos es de $288\sqrt{3}[\text{cm}^3]$.
Para determinar el área de este prisma debemos notar que está compuesto por dos caras basales hexagonales de lado 4[cm] y por 6 rectángulos congruentes de lados 4[cm] y 12[cm]. Con estos datos el área del prisma es:

$$\text{Á}_{\text{prisma}} = 6 \cdot \text{Á}_{\text{rectángulo}} + 2 \cdot \text{Á}_{\text{hexágono}}$$
$$\text{Á}_{\text{prisma}} = 6(4 \cdot 12) + 2(\frac{4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6}{2})$$
$$\text{Á}_{\text{prisma}} = 288 + 48\sqrt{3}$$

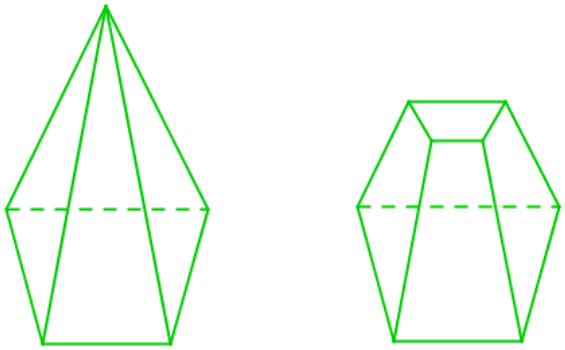
Finalmente el área de la caja de pañuelos es de $288 + 48\sqrt{3}[\text{cm}^2]$.

1. **Pirámide:** Es el poliedro que está formado por una cara poligonal (cara basal), y por tantos triángulos como lados tienen la cara basal (caras laterales). Las caras laterales concurren a un punto en común denominado ápice o vértice de la pirámide.



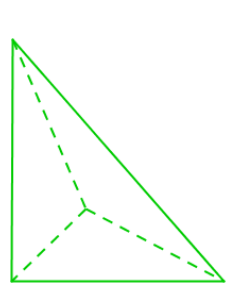
Dentro de los elementos que destacan en las pirámides se encuentra la **apotema**, segmento que corresponde a la altura de cualquiera de sus lados laterales, y la **altura** que corresponde al segmento perpendicular a la cara basal que pasa por el vértice de la pirámide.

Si una pirámide se intersecta con un plano paralelo a su cara basal, entonces se obtiene un objeto denominado **tronco de la pirámide** o bien **pirámide truncada**. Las caras laterales de estas figuras son trapecios y la base de la pirámide menor con la base del tronco de la pirámide mayor son semejantes.

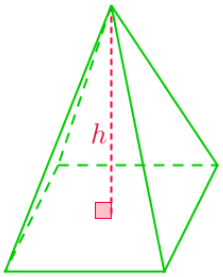


Las pirámides al igual que los primas se pueden clasificar de tres formas de acuerdo a las siguientes características:

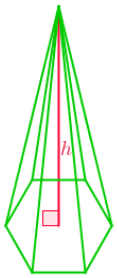
- **Pirámide Oblicua:** Es aquella en que algunas de sus caras no corresponden a un triángulo isósceles.
- **Pirámide Recta:** Es aquella en que sus caras laterales corresponden a triángulos isósceles y la altura cae al punto medio del poligono basal. En adelante cuando hablemos de pirámides haremos referencia a una pirámide recta a no ser que se indique lo contrario.
- **Pirámide Regular:** Es aquella pirámide que tiene como base un polígono regular y sus caras laterales son todos triángulos isósceles congruentes entre sí. En este cuerpo la altura de la pirámide coindice con el centro del polígono basal.



Pirámide Oblicua



Pirámide Recta

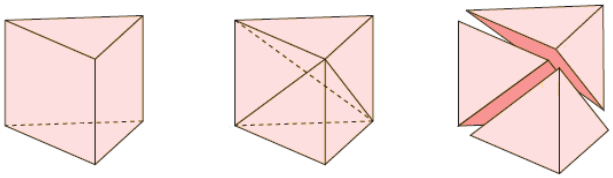


Pirámide Regular

Área y volumen de una pirámide

Al igual que con los otros poliedros, para determinar el área de una pirámide calculamos el área de cada una de las caras que forman la superficie del cuerpo y luego sumamos las áreas obtenidas. No expresaremos una ecuación general para determinar el valor de la superficie de una pirámide ya que dependerá de la forma que esta tenga.

Para determinar el volumen de una pirámide debemos acudir a un teorema que establece que todo prisma triangular se puede dividir en tres pirámides equivalentes, es decir, con el mismo volumen. De acuerdo al teorema, se obtiene que el volumen de una pirámide equivale a un tercio del volumen de un prisma, es decir:



$$\mathrm{V}_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{Á}_{\text{basal}} \cdot \text{altura}$$

Cabe destacar que el resultado anteriormente obtenido es válido para cualquier tipo de pirámide con la cual se trabaje.

✎ *Ejemplo*

1. *¿Cuánto mide el área basal de una pirámide recta de base cuadrada si tiene un volumen de* $864[cm^3]$ *y la altura de la pirámide con la arista basal están en la razón* $3:2$*?*

   Solución: Sea la altura de la pirámide h y la arista basal a tenemos que estas dos medidas están en la razón $3:2$, es decir:

   $$h = 3x \tag{1}$$
   $$a = 2x \tag{2}$$

   Con el dato que nos dan del volumen de la pirámide podemos obtener el valor de x de la siguiente manera:

   $$\begin{aligned}
   V_{\text{pirámide}} &= \frac{\text{Á}_{\text{basal}} \cdot \text{altura}}{3} \\
   V_{\text{pirámide}} &= \frac{a^2 \cdot h}{3} \\
   V_{\text{pirámide}} &= \frac{(2x)^2 \cdot 3x}{3} \\
   V_{\text{pirámide}} &= 4x^3 \\
   \frac{V_{\text{pirámide}}}{4} &= x^3 \\
   \sqrt[3]{\frac{V_{\text{pirámide}}}{4}} &= x \\
   \sqrt[3]{\frac{864}{4}} &= x \\
   6 &= x
   \end{aligned}$$

   Reemplazando este valor en la ecuación (2) obtenemos que el lado del cuadrado de la base mide $12[\text{cm}]$ y que por lo tanto el área basal mide $144[\text{cm}^2]$.

✍ *Ejercicios* *2*

Resolver los siguientes ejercicios.

1. Una figura plana se traslada $12[\text{cm}]$ apoyada sobre uno de sus lados en un plano perpendicular a él. Calcular el volumen y la superficie del cuerpo generado si la figura trasladada es:

   a) Un triángulo equilátero de lado $3[\text{cm}]$.

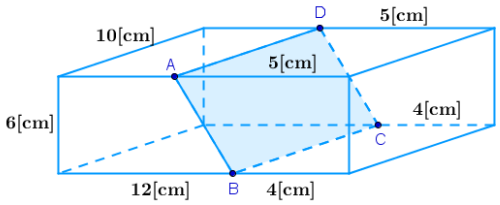
   b) Un cuadrado de lado $5[\text{cm}]$.

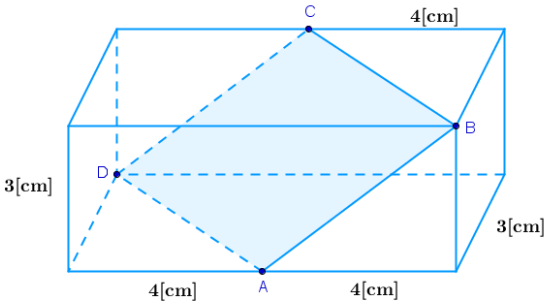
   c) Un heptágono regular de lado $4[\text{cm}]$ y apotema $2[\text{cm}]$.

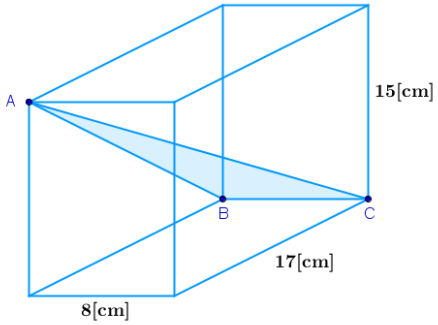
   d) Un rombo cuyas diagonales miden $6[\text{cm}]$ y $8[\text{cm}]$.

2. A continuación se nos presentan tres prismas rectangulares. Determinar en cada caso:

   a) El tipo de figura plana que corresponde al área sombreada.
   b) El perímetro de la figura achurada.
   c) El perímetro del paralelepípedo.
   d) El área del paralelepípedo.
   e) El volumen del paralelepípedo.







3. ¿Cuál el volumen de una pirámide regular cuya base es un hexágono de lado 4[mm] y cuya arista lateral mide 6[mm].?

2.2. Los Cuerpos Redondos

Los cuerpos redondos son todos aquellos cuerpos geométricos que están delimitados por al menos una superficie curva. Hay tres clases principales de cuerpos redondos: el cilindro, el cono y la esfera. En particular estudiaremos el cilindro circular recto y el cono circular recto que cumplen con la condición de que son generados por una superficie plana que gira en torno a un eje de rotación fijo que es perpendicular a la(s) base(s) de cada cuerpo geométrico.

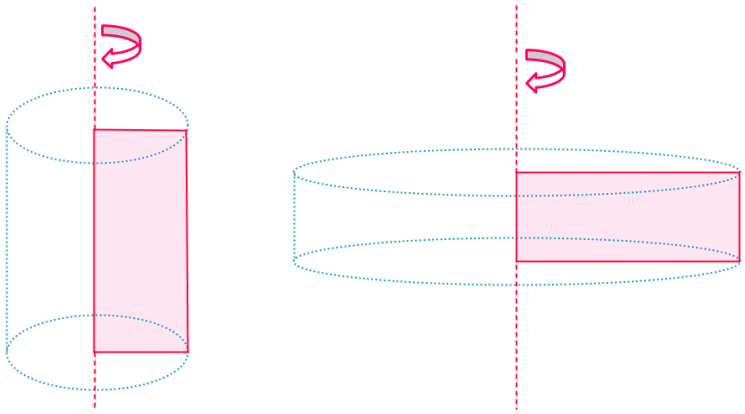




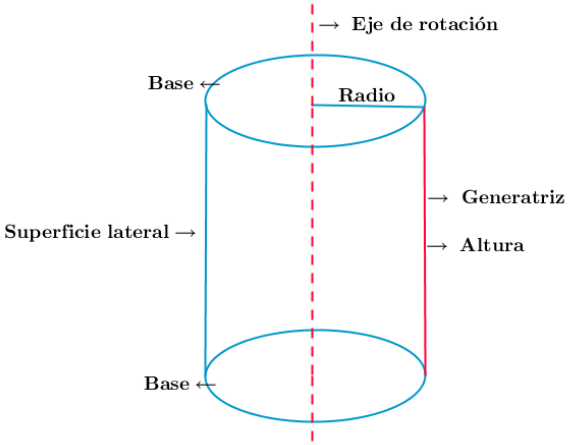


2.2.1. Cilindro

El cilindro es un cuerpo redondo que se genera al rotar un rectángulo sobre uno de sus lados.

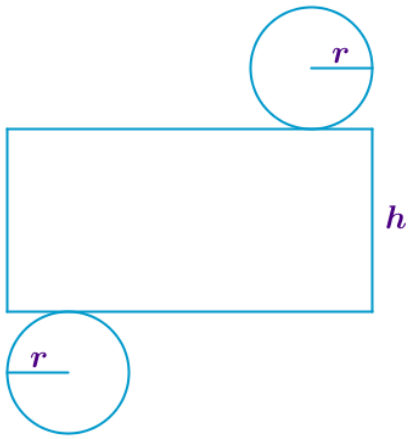


Dentro de los elementos que nos son útiles estudiar encontramos el **eje de rotación** que corresponde a la recta entorno a la cual gira el rectángulo que forma al cilindro, la **altura** (h) que corresponde al lado sobre el cual se rota el rectángulo, el **radio** (r) que corresponde al otro lado del rectángulo que forma al cilindro, la **generatriz** (g) que corresponde al lado del rectángulo paralelo al eje de rotación, en este caso coincide con la medida de la altura, las **bases** que corresponden a dos círculo congruentes y la **superficie lateral** que corresponde a la región lateral del cilindro.



Área y volumen del cilindro

Como vimos anteriormente el cilindro está formado por dos círculos basales y por una superficie lateral. Para determinar el valor de la superficie de este cuerpo nos fijaremos en la siguiente red correspondiente a la plantilla de un cilindro en el plano para su construcción.



De acuerdo a la figura, podemos ver que el cilindro está formado por dos círculos congruentes de radio r y por un rectángulo cuya base coincide con el perímetro del círculo $(2\pi r)$ y cuya altura corresponde a la altura del cilindro (h). En base a lo anterior el área del cilindro corresponde a la suma de las áreas basales más el área lateral:

$$\text{Á}_{\text{cilindro}} = 2 \cdot \text{Á}_{\text{círculo}} + \text{Á}_{\text{rectángulo}}$$
$$\text{Á}_{\text{cilindro}} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

$$\boxed{\text{Á}_{\text{cilindro}} = 2\pi r(r + h)}$$

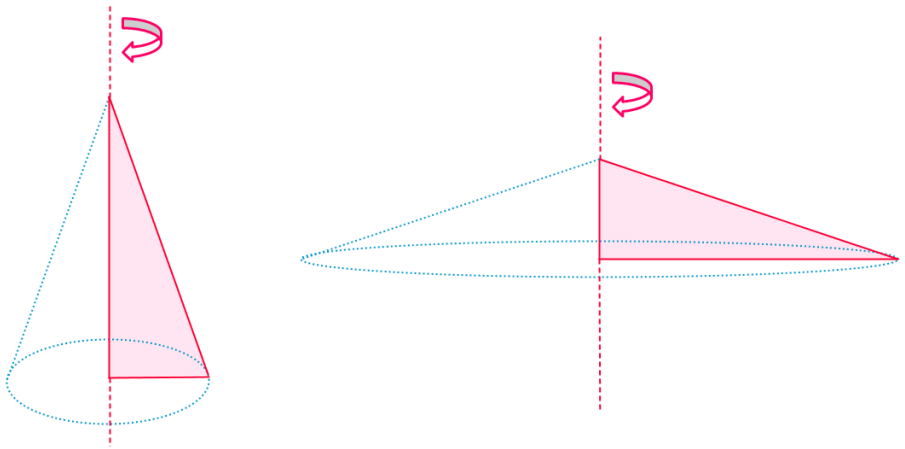
Ahora bien, para determinar el volumen de un cilindro se ha demostrado que es equivalente al volumen de un prisma cuya área basal y altura es la misma. De acuerdo a esto la expresión que nos permite calcular el espacio que ocupa un cilindro de altura h y de radio basal r en el espacio es:

$$\text{V}_{\text{cilindro}} = \text{V}_{\text{prisma}}$$
$$\text{V}_{\text{cilindro}} = \text{Á}_{\text{basal}} \cdot altura$$
$$\text{V}_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h$$

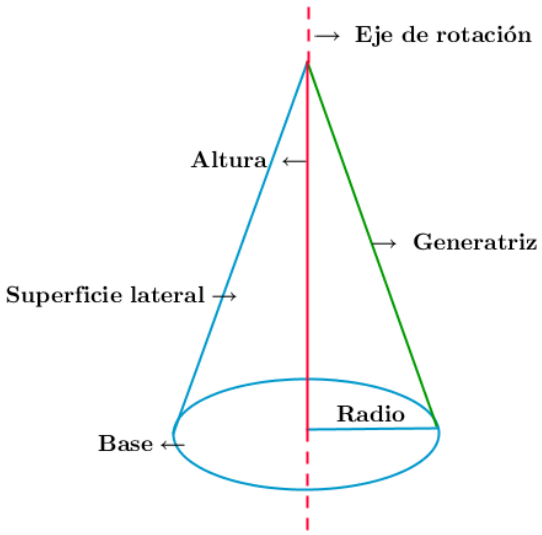
$$\boxed{\text{V}_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h}$$

2.2.2. Cono

El cono es un cuerpo redondo que se genera al rotar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.

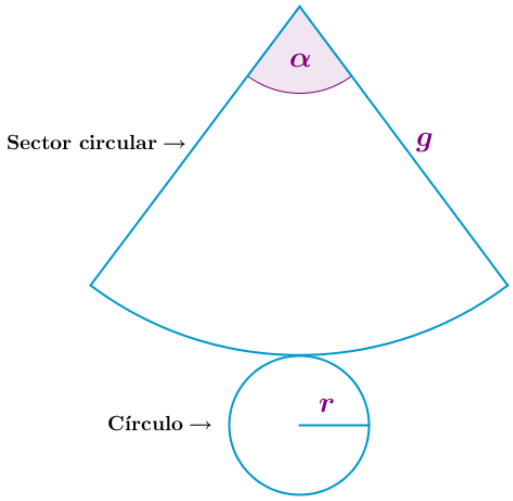


Dentro de los elementos que nos son útiles estudiar encontramos el **eje de rotación** que corresponde a la recta entorno a la cual gira el triángulo que forma al cono, la **altura** (h) que corresponde al cateto sobre el cual se rota el triángulo rectángulo , el **radio** (r) que corresponde al otro cateto del triángulo rectángulo, la **generatriz** (g) que corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo, la **base** que corresponde al círculo formado a partir de la rotación del radio y la **superficie lateral** o manto que corresponde a la región lateral del cono.



Área y volumen del cono

Como vimos anteriormente el cono está formado por un círculo basal y por una superficie lateral. Para determinar el valor de la superficie de este cuerpo nos fijaremos en la siguiente red correspondiente a la plantilla de un cono en el plano para su construcción.



De acuerdo a la figura, podemos ver que el cono está formado por un círculo de radio r y por un sector circular cuyo radio corresponde a la generatriz g y cuya longitud de arco corresponde al perímetro del círculo basal $2\pi r$. Dicho esto, el área del cono corresponde a la suma del área basal más el área del sector circular[3]:

$$\text{Á}_{\text{cono}} = \text{Á}_{\text{círculo}} + \text{Á}_{\text{sector circular}}$$
$$\text{Á}_{\text{cono}} = \pi r^2 + \frac{\pi g^2 \alpha}{360}$$
$$\text{Á}_{\text{cono}} = \pi r^2 + \pi r g$$
$$\boxed{\text{Á}_{\text{cono}} = \pi r(r+g)}$$

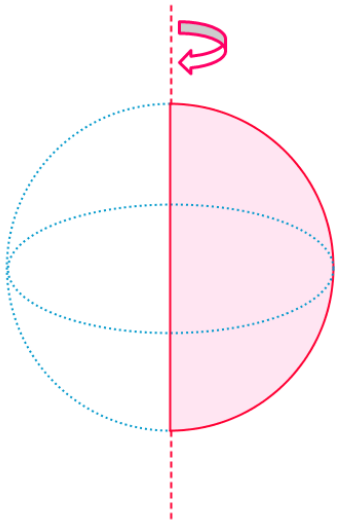
Ahora bien, para determinar el volumen de un cono se ha demostrado empíricamente que corresponde a un tercio del volumen de un cilindro cuya área basal y altura es la misma. De acuerdo a esto la expresión que nos permite calcular el espacio que ocupa un cono de altura h y de radio basal r en el espacio es:

$$\text{V}_{\text{cono}} = \frac{\text{V}_{\text{cilindro}}}{3}$$
$$\text{V}_{\text{cono}} = \frac{\text{Á}_{\text{basal}} \cdot altura}{3}$$
$$\boxed{\text{V}_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

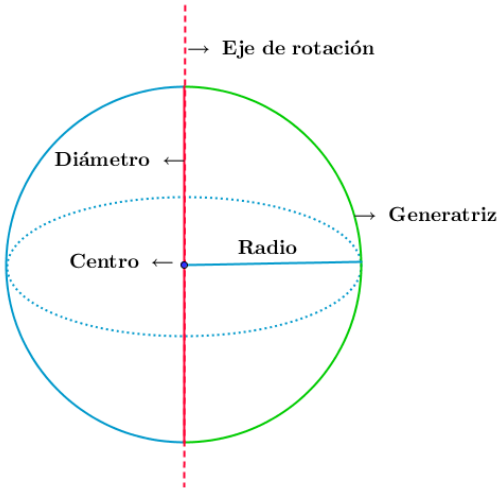
[3]Para ver como se obtiene el área de este sector circular revisar en la guía "Circunferencia y círculo" el contenido referente a la medida de un arco en unidades de longitud y al área de un sector circular.

2.2.3. Esfera

La esfera es un cuerpo redondo que se genera al rotar un semicírculo sobre su diámetro.



Dentro de los elementos que nos son útiles estudiar encontramos el **eje de rotación** que corresponde a la recta entorno a la cual gira el semicírculo que forma a la esfera, el **centro** que corresponde al punto que equidista de cualquier punto de la superficie esférica y que corresponde al centro del semicírculo que genera a la esfera, el **radio** (r) que corresponde al segmento que une el centro de la esfera con cualquier punto de su superficie, el **diámetro** (d) que corresponde al segmento que pasa por el centro de la esfera y que une dos puntos opuestos de su superficie esferica y la **generatriz** (g) que corresponde al semicírculo que forma la superficie esférica,



Área y volumen de una esfera

Para determinar la medida de la superficie de una esfera, a diferencia de los otros cuerpos, es imposible basarnos en la red que lo forma ya que este cuerpo no la posee por ser un cuerpo geométrico que no se puede representar en el plano. Frente a esto es que el cálculo del área de este cuerpo es bastante complejo, por lo que sólo nos limitaremos a enunciar la expresión que nos permite determinar su superficie:

$$\text{Á}_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$$

Ahora bien, al igual que con el área, deducir la expresión que me determine el espacio que ocupa una esfera en el espacio no es una tarea fácil. Frente a esto es que nos limitaremos a sólo enunciarla. El volumen de una esfera de radio r es:

$$\text{V}_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

✎ *Ejemplo*

Un cilindro, un cono y una esfera poseen el mismo radio R. ¿Cuánto debe medir la altura del cono y del cilindro para que los tres cuerpos geométricos posean el mismo volumen?

Solución: El enunciado nos pide calcular la altura de un cono (h_{cono}) y de un cilindro (h_{cilindro}) de tal manera que tengan el mismo volumen que una esfera, por lo tanto lo que haremos es igualar los volúmenes de los cuerpos geométricos para despejar la altura en funcion del radio R que poseen los tres cuerpos por igual:

$$\begin{aligned} V_{\text{cilindro}} &= V_{\text{esfera}} \\ \pi R^2 \cdot h_{\text{cilindro}} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ h_{\text{cilindro}} &= \frac{4\pi R^3}{3 \cdot \pi R^2} \\ h_{\text{cilindro}} &= \frac{4R}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{cono}} &= V_{\text{esfera}} \\ \frac{\pi R^2 \cdot h_{\text{cono}}}{3} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ h_{\text{cono}} &= \frac{4\pi R^3 \cdot 3}{3 \cdot \pi R^2} \\ h_{\text{cono}} &= 4R \end{aligned}$$

De esta forma la altura que debe poseer un cilindro para tener el mismo volumen que la esfera es de $\frac{4R}{3}$ y la altura que debe poseer un cono para tener el mismo volumen que la esfera es de $4R$.

✍ *Ejercicios* 3

Resolver los siguientes ejercicios.

1. Si se rota indefinidamente un rectángulo de lados 10[cm] y 5[cm] sobre su lado menor. ¿Cuál es el volumen del cuerpo engendrado? ¿Cuál es el volumen del cuerpo engendrado si se rota el mismo rectángulo sobre su lado mayor? ¿Cuál es el área de los cuerpos engendrados en cada caso?

2. Si se rota un cuarto de un círculo de radio 6[cm] sobre su radio externo. ¿Cuál es el volumen y área del cuerpo formado?

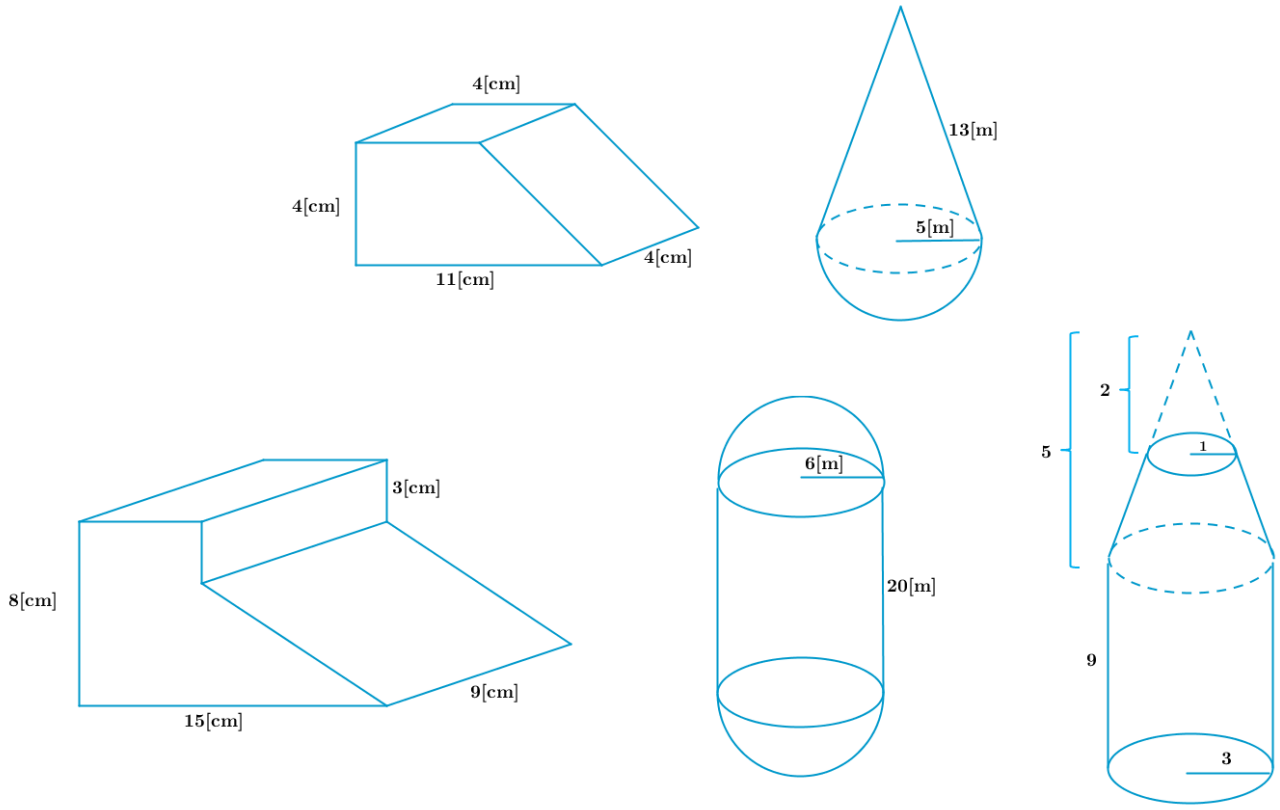
3. ¿En qué razón se encuentran los volúmenes de los cuerpos engendrados cuando un triángulo rectángulo de lados 7[cm] y 12[cm] gira primero entorno a su cateto menor y luego entornos a su cateto mayor? ¿En qué razón se encuentran las áreas de los mismos cuerpos engendrados?

4. ¿Qué sucede con el área y volumen de un cilindro si su altura disminuye a la mitad y su radio se mantiene constante? ¿Y si el radio y la altura se duplican? ¿Y si el radio se triplica y la altura permanece constante?

5. ¿Qué sucede con el volumen de un cono si su altura se duplica y su radio disminuye a la mitad? ¿Y si el radio y la altura se triplican? ¿Y si sólo uno de las dos medidas se duplica y la otra se mantiene constante?

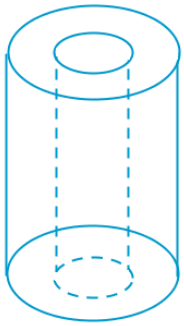
6. ¿Qué sucede con el volumen y área de una esfera si su radio disminuye a su cuarta parte? ¿Y si su radio se duplica?

7. Determina el volumen y área total de los siguientes cuerpos geométricos formados por prismas rectos y por cuerpos redondos:



8. Un cono de diámetro 6[cm] se inscribe en un cubo de arista 11[cm], de tal modo que la base del cono quede inscrita en uno de los lados del cubo y que el vértice del cono quede inscrito en el la cara opuesta en la que está inscrita la base del cono. ¿Cuál es el volumen del espacio limitado entre los dos cuerpos geométricos?

9. ¿Cuál es el volumen del cuerpo geométrico de la figura si su altura es de 10[cm], su grosor es de 3[cm] y el diámetro del orificio es de 5[cm]?



10. Una pirámide recta de base cuadrada se inscribe en un cono, de tal modo que la base de la pirámide quede inscrita en la base del cono y que el vértice de la pirámide coincida con el vértice del cono. Si la altura del cono es de 22[cm], el radio basal del cono es 8[cm] y el lado del cuadrado es de 4[cm], ¿cuál es el volumen del espacio limitado entre los dos cuerpos geométricos?

Desafíos resueltos

✓ Desafío I: En el caso de un poliedro convexo tenemos que al trazar una recta por dos puntos cualesquiera de su interior, esta sólo puede cortar a dos de sus caras. En cambio, en un poliedro cóncavo al trazar una recta por dos puntos cualesquiera de su interior, esta puede cortar a dos de sus caras o más.
Volver

✓ Desafío II: Esto se debe a que a pesar de que la figura formada tiene sus seis caras congruentes, los ángulos diedros que se forman no son todos congruentes entre sí.
Volver

Bibliografía

[1] Manual de preparación PSU Matemática, *Quinta Edición*, *Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.*

[2] Desarrollo del pensamiento matemático, Cuerpos Geométricos, No 16, *Junio 2007*, *Martín Andonegui Zabala.*