open green road

Guía Matemática

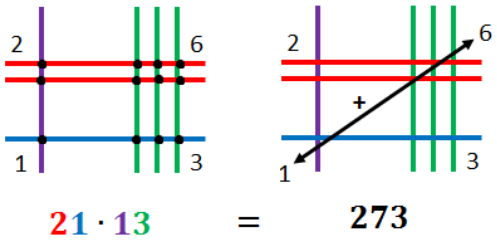
POTENCIAS

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

1. Potencias

Las matemáticas que utilizamos hoy en día surgieron hace más de 4000 años atrás. Como bien sabemos éstas no nacieron totalmente formadas, sino que se fueron creando gracias a los acumulativos esfuerzos de muchos hombres que procedían de diversos lugares.



A través de la historia hemos podido evidenciar como distintas culturas desarrollaron sus propios métodos para multiplicar y facilitar los cálculos matemáticos. Por ejemplo, la cultura maya para multiplicar dos números realizaban rayas horizontales de acuerdo a las cifras que tenía el primer factor y rayas verticales de acuerdo a los valores que tenía las cifras del segundo factor, para luego a partir de ese esquema sumar los puntos de intersección que tenían las esquinas para obtener las cifras del resultado de la multiplicación. De esta forma, contando de izquierda a derecha, el resultado de la suma de la esquina superior izquierda corresponde al primer dígito, el resultado de la esquina inferior derecha corresponde al último dígito y la diagonal que une las otras dos esquinas corresponde a los dígitos del centro.

☞¡Mira!

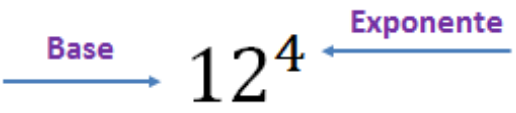
En la actualidad, la definición de multiplicación se puede interpretar como la suma abreviada de un mismo número. De esta manera si tenemos $4 \cdot 5$ es equivalente a sumar 5 veces el número 4, esto es, $4 + 4 + 4 + 4 + 4$.

De esta misma manera como la suma reiterada de un número se puede abreviar a través de la multiplicación, la multiplicación sucesiva de un número se puede abreviar mediante una **potencia**. Así, si tenemos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ es equivalente a multiplicar 5 veces el número 2, esto se representa como 2^5 y se lee "2 elevado a 5". Cuando se trata de los exponentes 2 ó 3 la lectura varía. Así, 5^2 se lee "5 al cuadrado" y 5^3 se lee "5 al cubo".

En general, si queremos multiplicar cualquier número n veces por sí mismo se puede representar:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$$

En las potencias el número que se repite dentro de la multiplicación se denomina **base** y el número de veces que se multiplica la base se llama **exponente**.



*Una **potencia** es una expresión que representa a un número que se multiplica por sí mismo varias veces.*

✍ *Ejercicios* 1

Completa la siguiente tabla de potencias al cuadrado y al cubo.

Número	Cuadrado	Cubo
1	1	
2		
3		27
4		
5	25	
6		
7		343
8		
9	81	
10		
11		1.331
12		
13	169	
14		
15		3.375

Al trabajar con potencias de base y exponente natural, podemos notar que existen ciertas regularidades con la última cifra del resultado de estas potencias.

Analicemos el caso de las potencias con base 3:

$$3^1 = 3$$
$$3^2 = 9$$
$$3^3 = 27$$
$$3^4 = 81$$
$$3^5 = 243$$
$$3^6 = 729$$
$$3^7 = 2.187$$
$$3^8 = 6.561$$
$$3^9 = 19.683$$

Al observar la última cifra del desarrollo de cada potencia vamos notando como se repiten los números 3, 9, 7 y 1. Este ciclo se reitera de forma indefinida dentro del desarrollo de las potencias de base 3 y, en general, de cualquier potencia que tenga como base un número natural terminado en 3, como por ejemplo 13, 23, 33, 43, etc.

Analicemos el caso de las potencias con base 4:

$$4^1 = 4$$
$$4^2 = 16$$
$$4^3 = 64$$
$$4^4 = 256$$
$$4^5 = 1.024$$
$$4^6 = 4.096$$

En este caso al observar la última cifra del desarrollo de cada potencia vamos notando como se repiten los números 4 y 6. Este ciclo se reitera de forma indefinida dentro del desarrollo de las potencias de base 4 y, en general, de cualquier potencia que tenga como base un número natural terminado en 4, como por ejemplo 14, 24, 34, 44, etc.

Analicemos el caso de las potencias con base 5:

$$5^1 = 5$$
$$5^2 = 25$$
$$5^3 = 125$$
$$5^4 = 625$$
$$5^5 = 3.125$$

En este caso al observar la última cifra del desarrollo de cada potencia vamos notando como todas terminan en la cifra 5 que corresponde a la base de la potencia trabajada. En general cualquier potencia que tenga como base un número natural terminado en 5 cumplirá el mismo ciclo de repetición, como por ejemplo 15, 25, 35, 45, etc.

En general, las últimas cifras de todos los desarrollos de cualquier potencia con base natural se repiten de manera cíclica. Los ciclos de repetición pueden poseer una extensión de 1, 2 ó 4 números de acuerdo a la última cifra de la base de la potencia con la cual se esté trabajando.

Desafío 1



¿En qué número termina el desarrollo de la potencia 34.567^{235}?
Respuesta

2. Operaciones con potencias

2.1. Adición

La suma de potencias sólo se hace efectiva cuando éstas poseen igual base e igual exponente. Por ejemplo:

$$5^2 + 5^2 + 5^2 = 3 \cdot 5^2$$

2.2. Multiplicación

- Si multiplicamos potencias que tienen igual base, se conserva la base y se suman los exponentes. Por ejemplo:

$$7^{-5} \cdot 7^2 \cdot 7^{12} \cdot 7^{-3} = 7^{-5+2+12+(-3)} = 7^6$$

En general, si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$a^m \cdot a^n = a^{n+m}$$

- Si multiplicamos potencias que tienen igual exponente, se conserva el exponente y se multiplican las bases. Por ejemplo:

$$2^8 \cdot 6^8 = (2 \cdot 6)^8 = 12^8$$

En general, si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

2.3. Potencia de base positiva con exponente entero

Para trabajar con potencias que poseen exponentes enteros tenemos que tener las siguientes consideraciones:

- Un número elevado a un entero negativo es igual al valor invertido de la base elevado al mismo exponente en versión positiva. Por ejemplo:

$$4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

En general, si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

- Un número elevado a 0 es igual a la unidad. Por ejemplo:

$$9^0 = 1$$

En general, si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces:

$$a^0 = 1$$

- Un número elevado a la unidad es igual al mismo número. Por ejemplo:

$$14^1 = 14$$

En general, si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces:

$$a^1 = a$$

2.4. Potencias de base 10 y exponente entero

Toda potencia de base 10 que posee exponente positivo es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades indica el exponente, por el contrario, si el exponente de la potencia es negativo el resultado será igual a la unidad antepuesta de tantos ceros como unidades indique el exponente.

$$10^0 = 1$$

$10^1 = 10$	$10^{-1} = 0{,}1$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = 0{,}01$
$10^3 = 1.000$	$10^{-3} = 0{,}001$
$10^4 = 10.000$	$10^{-4} = 0{,}0001$
$10^5 = 100.000$	$10^{-5} = 0{,}00001$
$10^6 = 1.000.000$	$10^{-6} = 0{,}000001$
$10^7 = 10.000.000$	$10^{-7} = 0{,}0000001$
$\vdots$	$\vdots$

✎ ***Ejemplo***

Resolver la siguiente expresión matemática:

$$2^5 \left[81 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} + 9^2\right]$$

Solución: Para resolverlo utilizaremos las propiedades de las potencias vistas anteriormente.

$$\begin{aligned}
&2^5 \left[81 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} + 9^2\right] \\
&= 2^5 \left[81 + 3^4 + 9^2\right] && (1) \\
&= 2^5 \left[3^4 + 3^4 + 3^4\right] && (2) \\
&= 2^5 \left[3 \cdot 3^4\right] && (3) \\
&= 2^5 \left[3^1 \cdot 3^4\right] \\
&= 2^5 \cdot 3^5 && (4) \\
&= (2 \cdot 3)^5 \\
&= 6^5
\end{aligned}$$

En la ecuación (1) utilizamos que una potencia elevada a un número negativo se invierte y se transforma el exponente al signo inverso.

En la ecuación (2) utilizamos la propiedad de adición de potencias con igual base e igual exponente.

En la ecuación (3) utilizamos la propiedad de multiplicación de potencias con igual base.

En la ecuación (4) utilizamos la propiedad de multiplicación de potencias con igual exponente.

✍ *Ejercicios* ***1***

Utilizando las propiedades de las potencias, resuelve los siguientes ejercicios:

1. $6^{-2} - 6^2 =$
2. $3^2 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{21} \cdot 3^{-7} =$
3. $7^{-2} \cdot 7 - 7^0 + 1$
4. $8 \cdot 9^{-2} + 3^{-4} - 3^{-5}$
5. $8^{-2} + 3^{-3} - 2^{-6} =$
6. $\dfrac{2^{-1} + 6^{-1}}{8^{-1}} =$
7. $\dfrac{2^{-3} + 4^{-3}}{4^{-3}} =$

3. Sistema de numeración decimal

Los números que conocemos hoy en día fueron evolucionando de la mano con el progreso de las culturas. El primer sistema de numeración del cual se tiene conocimiento data al año 1.800 a.C y fue ideado por los babilónicos. Dicho sistema utilizaba una notación posicional, ya que el valor del dígito dependía tanto del valor del símbolo como de la posición que ocupaba.

Otra cultura en la que se destaca su sistema de numeración son los egipcios. El sistema que implementaron se basó en la adición, ya que con sumar los valores de los símbolos empleados se podía determinar la cantidad en cuestión. A continuación se presenta una imagen con el valor que tiene cada símbolo de la cultura egipcia, junto con una estructura egipcia donde se muestra representado el número 1.333.331.



A partir de lo anterior podemos notar que el sistema de numeración egipcio fue una primera aproximación a nuestro sistema de numeración actual, ya que los símbolos que la antigua cultura utilizaba representan las sucesivas potencias de 10.

En la actualidad, la forma en que nosotros escribimos los números se basa en el sistema de numeración decimal que tiene como base el número 10. Dentro de este sistema es posible expresar toda cantidad como suma de múltiplos de potencias sucesivas de 10.

✎ ***Ejemplo***

Escribir los números 8.672 y 39,25 en base al sistema de numeración decimal.

Solución:

- El número 8.672 se puede escribir como:
  $8.672 = 8.000 + 600 + 70 + 2 = 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
- El número 39,25 se puede escribir como:
  $39,25 = 30 + 9 + 0,2 + 0,05 = 30 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$

✍ ***Ejercicios*** ***2***

Escribe los siguientes números de acuerdo al sistema decimal de numeración:

1. 64
2. 923
3. 3.482
4. 6,34
5. 12,1
6. 101.001
7. 0,0023
8. 183,90
9. 84,203

4. Notación Científica

Otra de las aplicaciones que tienen las potencias de base 10 es que son utilizadas para representar números que son muy grandes, como la distancia de la Tierra al Sol, o números que son muy pequeños, como la carga de un electrón. Para poder calcular con estos números es que hacemos uso de la **notación científica**, la cual es una forma de representar un número como el producto de una potencia de 10 y un número entre 1 y 10.

✎ ***Ejemplo***

Escribir la siguiente información en notación científica:

a) La distancia promedio que existe de la Tierra al Sol es de 149.597.871 kilometros.

b) La carga de un electrón es de 0,000000000000000000001602176 Coulomb.

Solución:

a) Distancia de la Tierra al Sol: $149.597.871[\text{km}] = 1,49597871 \cdot 10^8[\text{km}]$

b) Carga de un electrón: $0,000000000000000000001602176 = 1,602176 \cdot 10^{-19}$

En general, si $0 < a < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces :

$$a \cdot 10^n$$

representa un número escrito en notación científica.

✍ *Ejercicios* *3*

1. *Escribe la siguiente información en notación científica:*

   a) La distancia en línea recta entre Arica y Punta Arenas es de 3.860.630 [m].

   b) La rapidez de la luz en el vacío es de 299.792.458 [m/s].

   c) El hombre más gordo del mundo masa alrededor de 368.000 [g].

   d) La uñas más largas del mundo miden alrededor de 0,003098 [km] y corresponden a Chris Walton.

   e) Robert Wadlow, el hombre más alto de la historia, medía 0,000272 [km].

   f) La familia más rica de Chile de acuerdo a la revista Forbes corresponde a la familia Luksic con US$17.800.000.000

   g) La línea del metro más larga corresponde a la línea 4 con 2.470.000 [cm]

   h) La longitud de onda de los rayos ultravioletas está comprendida entre los 0,0000004 [m] y los 0,000000015 [m]

2. *Calcula y expresa en notación científica:*

   a) $0,00035 \cdot 460.000.000 =$

   b) $\dfrac{0,003 \cdot 0,0000008}{0,00000004 \cdot 0,06} =$

   c) $(7,4 \cdot 10^{-3})(1,15 \cdot 10^7) =$

   d) $\dfrac{2,3 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-12}} =$

Desafíos resueltos

✓ Nos piden determinar sólo la última cifra que resulta al desarrollar la potencia 34.567^{234}. Como vimos anteriormente esta cifra solo depende del número final de la base de la potencia, en este caso 7, y del exponente.
Los dígitos finales de las potencias con base 7, al igual que con el caso estudiado de las potencias con base 3, se van repitiendo de 4 en 4 de acuerdo al siguiente orden: 7, 9, 3 y 1.
Necesitamos calcular en que parte del ciclo cae el exponente 234, para esto buscamos el resto de dividir el exponente por 4, $234 : 4 = 58$ con resto 2. Por consiguiente 34.567^{234} posee la misma última cifra que la potencia $7^2 = 49$.
Finalmente la cifra pedida es 9. Volver

Bibliografía

[1] Apuntes para la preparación de la PSU Matemática, *Segunda Edición, 2009*, *Pamela Paredes Núñez, Manuel Ramírez.*

[2] Libro para el maestro, *Segunda Edición, 2001*, *Jesús Alarcón Bortolussi, Elisa Bonilla Rius, Rocío Nava Álvarez, Teresa Rojano Cevallos, Ricardo Quintero.*

[3] Desarrollo del pensamiento matemático, Potenciación, número 6, *Edición, 2005*, *Martín Andonegui Zabala.*

[4] Historia de las Matemática en los últimos 10.000 años, *Edición, 2008*, *Ian Stewart.*