



open green
road



Guía Matemática

DIAGRAMA DE ÁRBOL

tutora: Jacky Moreno



puntaje
nacional.cl

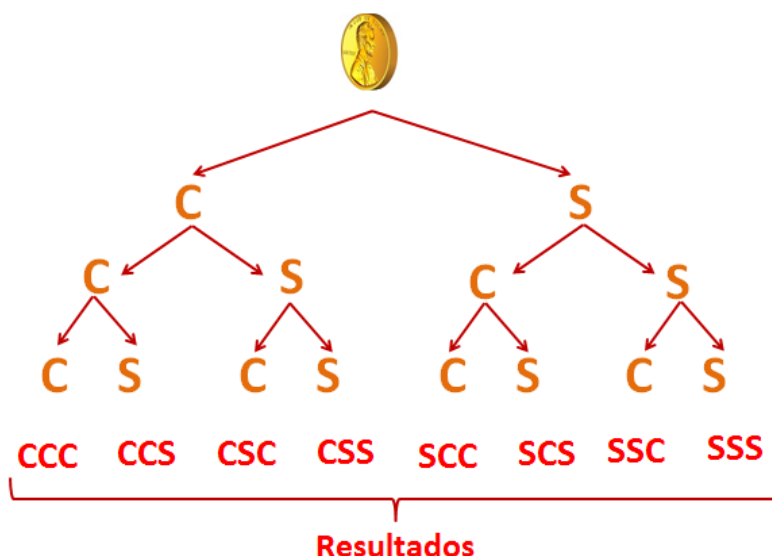
1. Diagrama de árbol

El diagrama de árbol es una herramienta gráfica que nos permite representar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio que consta de un determinado número de pasos que se pueden llevar a cabo de una manera finita, por lo tanto, este diagrama es una representación que nos permite realizar recuentos.

Ejemplo

Calcular la probabilidad de obtener al menos un sello al lanzar 3 veces una moneda común.

Solución: El diagrama de árbol para este ejercicio es:



Como podemos ver, la construcción de este diagrama consiste en poner una rama para cada posibilidad del primer lanzamiento (cara o sello), luego, al final de cada resultado, se continúa con la ramificación de los resultados posibles al lanzar la moneda por segunda vez, finalmente, a partir de los últimos resultados, se termina la ramificación con los sucesos que se pueden obtener al lanzar la moneda una tercera y última vez.

Al observar el diagrama de árbol podemos decir que hay 8 resultados posibles, de los cuales 7 tienen al menos un sello, por lo tanto, la probabilidad queda definida por la siguiente expresión:

$$P(\text{obtener al menos un sello}) = \frac{7}{8}$$

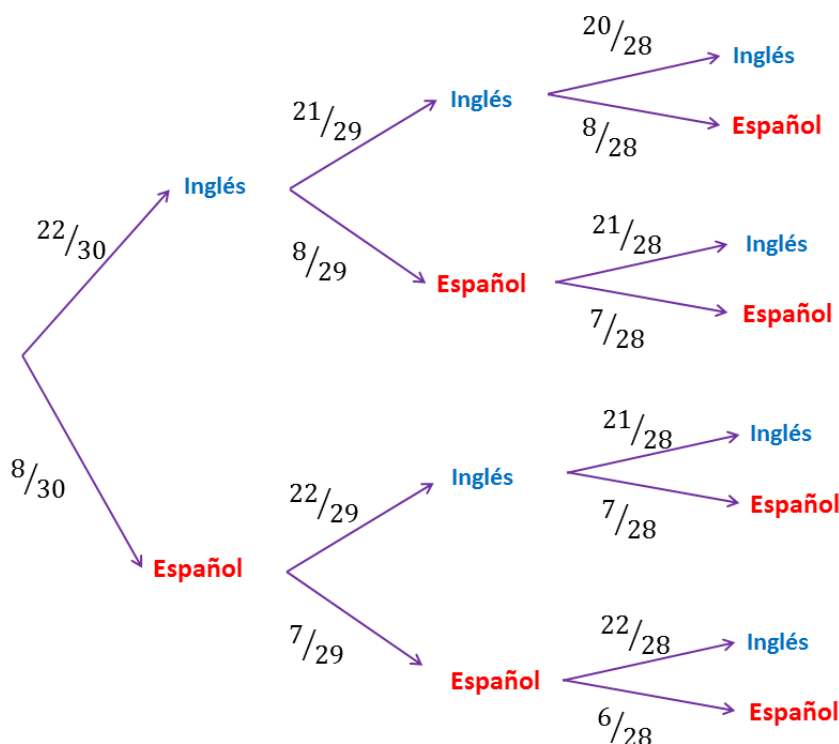
Los diagramas de árbol nos permiten calcular de manera más rápida algunas probabilidades ya sea utilizando la multiplicación de probabilidades en el caso de que se esté trabajando con ramas adyacentes, y/o utilizando la suma de las probabilidades en el caso de que se esté trabajando con ramas separadas.

Ejemplo

En un avión viajan 22 personas que hablan inglés y 8 personas que hablan español. Si se escogen tres personas al azar:

1. ¿Cuál es la probabilidad de elegir tres personas que hablen español?
2. ¿Cuál es la probabilidad de escoger dos personas que hablen inglés y una persona que hable español?

Solución: Representemos la información entregada mediante un diagrama de árbol:



Este diagrama presenta las tres fases de elección con sus respectivas probabilidades. Como cada vez que elijo a una persona no la puedo volver a elegir, el denominador de mis probabilidades va disminuyendo en una unidad a medida que voy eligiendo a más personas. Además, cabe notar, que el numerador de mis probabilidades también va variando de acuerdo al idioma que habla la persona que elijo. Por ejemplo, si selecciono a una persona que habla inglés, en mi segunda oportunidad de elegir una persona que habla el mismo idioma ya no voy a poder considerar al mismo, por lo tanto, en vez de poder elegir entre las 22 personas que hablan inglés voy a poder elegir entre las 21 personas que quedan.

En la parte uno de este ejercicio nos preguntan por la probabilidad de elegir a tres personas que hablan español, al observar el diagrama nos damos cuenta que existe sólo una rama que nos da esta combinación, por lo tanto, como se está trabajando con ramas adyacentes debemos multiplicar las probabilidades para obtener la probabilidad que nos están pidiendo. De esta manera tenemos lo siguiente:

$$P(\text{elegir 3 personas que hablen español}) = \frac{8}{30} \cdot \frac{7}{29} \cdot \frac{6}{28}$$

$$P(\text{elegir 3 personas que hablen español}) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{30 \cdot 29 \cdot 28}$$

$$P(\text{elegir 3 personas que hablen español}) = \frac{2}{145}$$

$$P(\text{elegir 3 personas que hablen español}) \approx 0,014$$

Finalmente la probabilidad de escoger 3 pasajeros que hablen español es 1,4 % aproximadamente.

En la parte dos de este ejercicio nos preguntan por la probabilidad de elegir dos personas que hablen inglés y una persona que hable español. Para esta probabilidad tenemos 3 casos posibles para escoger: $I - I - E$, $I - E - I$ ó $E - I - I$, por lo tanto, calculamos la probabilidad de cada combinación posible y luego las sumamos porque corresponden a ramas separadas.

$$P(I-I-E) = \frac{22}{30} \cdot \frac{21}{29} \cdot \frac{8}{28}$$

$$P(I-E-I) = \frac{22}{30} \cdot \frac{8}{29} \cdot \frac{21}{28}$$

$$P(E-I-I) = \frac{8}{30} \cdot \frac{22}{29} \cdot \frac{21}{28}$$

$$P(2 \text{ inglés y } 1 \text{ español}) = \frac{22}{30} \cdot \frac{21}{29} \cdot \frac{8}{28} + \frac{22}{30} \cdot \frac{8}{29} \cdot \frac{21}{28} + \frac{8}{30} \cdot \frac{22}{29} \cdot \frac{21}{28}$$

$$P(2 \text{ inglés y } 1 \text{ español}) = \frac{22}{145} + \frac{22}{145} + \frac{22}{145}$$

$$P(2 \text{ inglés y } 1 \text{ español}) = \frac{66}{145}$$

$$P(2 \text{ inglés y } 1 \text{ español}) \approx 0,46$$

Finalmente la probabilidad de escoger 2 pasajeros que hablen inglés y 1 pasajero que hable español es 46 % aproximadamente.

Ejercicios

1

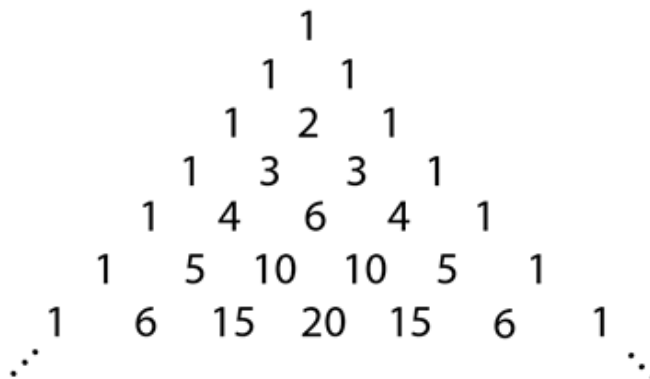
1. Javier esta jugando con un dado común, una moneda normal y una moneda cargada, de tal forma que al lanzar la moneda cargada la probabilidad de que salga sello es de $\frac{1}{4}$. Si el juego de Javier consiste en primero lanzar el dado común y, de acuerdo a su resultado, arrojar una de las dos monedas, de tal forma que si obtiene un número primo lanza la moneda cargada y, en caso contrario, lanza la moneda normal.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener sello?
2. Se sabe que para las fiestas patrias el 25 % de los empleados privados no recibe aguinaldo, de los cuales un 40 % asiste alguna fonda con sus familias. Si de los empleados privados que si reciben aguinaldo, un 40 % no asiste alguna fonda con sus familias, ¿cuál es la probabilidad de que un empleado privado asista a una fonda con su familia para las fiestas patrias?
 3. La probabilidad de que Julian realice un punto en voleibol es de $\frac{3}{8}$. Si al realizar el punto tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de lesionarse la muñeca en cambio si no realiza un punto tiene una probabilidad de $\frac{2}{7}$, ¿cuál es la probabilidad de que Julian no se lesione al jugar voleibol?

2. Triángulo de Pascal

En ocasiones, cuando existen muchas posibilidades para un experimento, el diagrama del árbol es un método un poco engorroso para determinar las probabilidades de ciertos sucesos. Frente a esto es que acudimos al triángulo de Pascal para calcular distintas probabilidades de sucesos de experimentos aleatorios que tengan como resultado dos sucesos equiprobables de ocurrencia, como por ejemplo lanzar una moneda.

El triángulo de Pascal representa una regularidad numérica que se muestra a continuación:



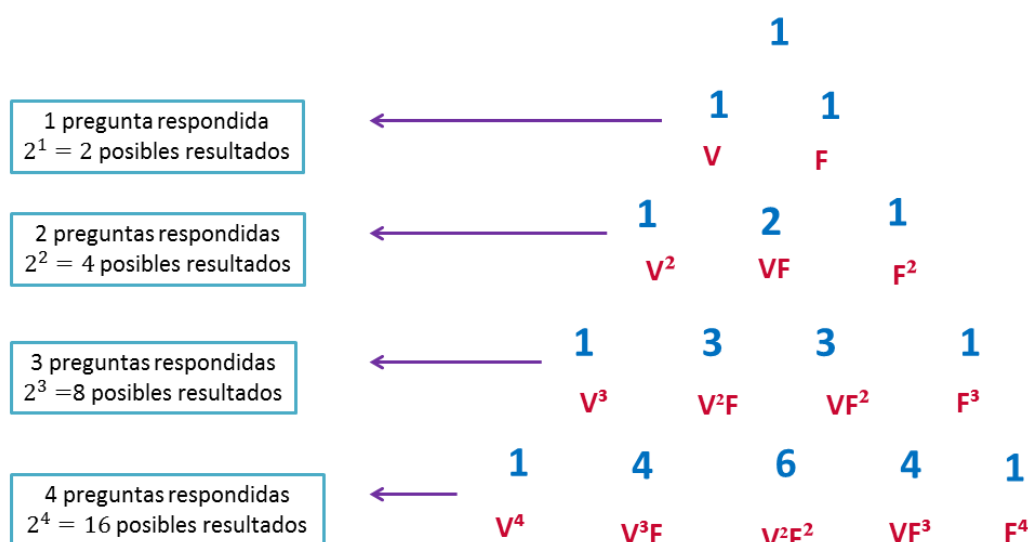
Este triángulo se construye a partir del número 1, siendo los coeficientes de los extremos que siguen también números unos, pero los valores céntricos corresponden aquellos valores que se obtienen de la suma de los dos números en la fila superior, de manera que se va formando una figura triangular.

Analicemos como este triángulo nos ayuda a determinar las probabilidades de ocurrencia de dos sucesos equiprobables de un experimento.

Ejemplo

Determinar el número de casos en que un estudiante responde 2 preguntas verdaderas y 2 falsas al responder un examen de 4 preguntas de verdadero o falso al azar.

Solución: Lo primero que tenemos que darnos cuenta es que el experimento de responder una pregunta al azar con verdadero o falso corresponde a un experimento aleatorio sencillo con dos sucesos equiprobables, en éste caso responder verdadero o responder falso tienen una probabilidad de un 50 % cada una. Como tenemos que iterar el experimento 4 veces, ya que el examen tiene esa cantidad de preguntas, utilizaremos el triángulo de Pascal.



Lo primero que tenemos que determinar es nuestro espacio muestral, como se puede ver a través de la imagen, los resultados posibles de un experimento, corresponde a una potencia de base 2 con exponente igual al número de repeticiones del experimento. En nuestro caso, como tenemos que repetir el experimento 4 veces el espacio muestral es $2^4 = 16$.

Ahora necesitamos determinar nuestros casos favorables por lo que nos fijaremos en la última fila de nuestro triángulo de Pascal correspondiente a los números 1 – 4 – 6 – 4 – 1. Estos números corresponden a los casos favorables de determinados sucesos, por ejemplo, la notación V^4 significa responder las 4 preguntas verdaderas, como tiene un 1 arriba significa que hay 1 caso favorable para ese suceso, la notación V^3F corresponde a responder 3 preguntas verdaderas y 1 falsa, como tiene un 4 arriba significa que hay 4 casos favorables. El mismo análisis se utiliza para los demás números.

Como a nosotros nos piden calcular la probabilidad del suceso “Responder dos preguntas verdaderas y dos falsas” debemos fijarnos en la notación V^2F^2 la cual tiene el número 6 como cantidad de casos favorables. Finalmente a partir de los datos obtenidos por el triángulo de Pascal calculamos la probabilidad pedida:

$$P(V^2F^2) = \frac{6}{16}$$

$$P(V^2F^2) = \frac{3}{8}$$

$$P(V^2F^2) = 0,375$$

$$P(V^2F^2) = 37,5\%$$

Ejercicios

2

Determinar las siguientes probabilidades utilizando el triángulo de Pascal.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 sellos si lanzamos 6 monedas comunes?
 2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras al lanzar 5 veces una moneda común?
 3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello al lanzar 4 veces una moneda común?
 4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la misma cantidad de caras y sellos al lanzar 8 veces una moneda común?
 5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de una cara al lanzar 7 monedas comunes?
-

Bibliografía

- [1] MANUAL DE PREPARACIÓN PSU MATEMÁTICA, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.