open green road

Guía Matemática

PROPORCIONES EN LA CIRCUNFERENCIA

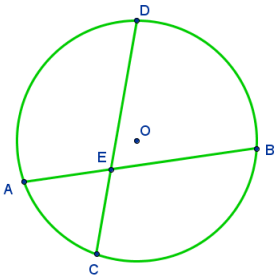
tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

1. Proporcionalidad entre las cuerdas de una circunferencia

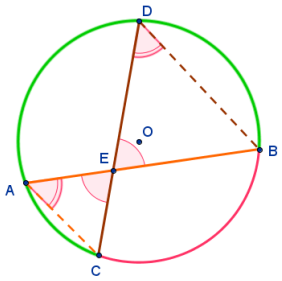
En la guía anterior estudiamos los elementos que se podían trazar en una circunferencia. A continuación estudiaremos algunas relaciones de proporcionalidad que se dan entre estos elementos:

Si trazamos dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en el interior de una circunferencia de centro O, el producto de los segmentos determinados en cada cuerda por el punto de intersección E entre ellas, es constante.



$$\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{ED}$$

Esta relación surge a partir de la proporcionalidad que existe entre los segmentos definidos en cada cuerda por su punto de intersección. De esta manera, si unimos los puntos A con C y D con B se forman dos triángulos que son semejantes entre sí:



$\measuredangle AEC \cong \measuredangle BED$ (Por ser ángulos opuestos por el vértice)

$\measuredangle CAB \cong \measuredangle BDC$ (Por ser ángulos que subtienden el mismo arco $\overset{\frown}{CB}$)

$\triangle AEC \sim \triangle BED$ (Por el criterio de semejanza A-A)

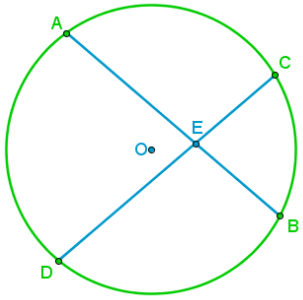
A partir de esto, como los triángulos son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales, en particular:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EB}}$$

$$\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{EC} \cdot \overline{DE}$$

✎ ***Ejemplo***

En la circunferencia de centro O de la figura, $\overline{DE} = 8$, $\overline{EB} = 4$ y $\overline{AB} = 20$.
¿Cuánto mide $\overline{EC}$?



Solución: Para determinar el segmento EC hacemos uso de la proporcionalidad entre cuerdas, de esta manera:

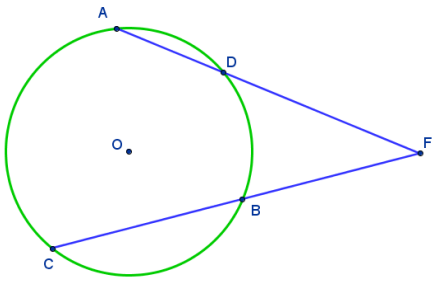
$$\begin{aligned}\overline{DE}\cdot\overline{EC} &= \overline{AE}\cdot\overline{EB}\\ 8\cdot\overline{EC} &= 16\cdot 4\\ \overline{EC} &= \frac{16\cdot 4}{8}\\ \overline{EC} &= 8\end{aligned}$$

---

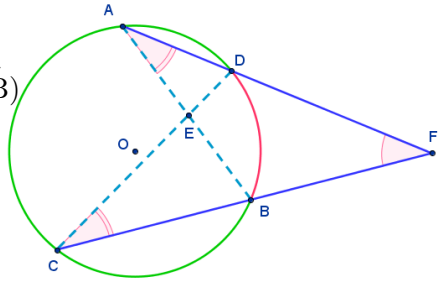
2. Proporcionalidad entre las secantes de una circunferencia

Si desde un punto F exterior a una circunferencia se trazan dos secantes a esta que cortan en los puntos D, A, B y C, el producto entre cada secante y su segmento exterior a la circunferencia es constante.

$$\overline{FD}\cdot\overline{FA} = \overline{FB}\cdot\overline{FC}$$



Esta relación surge a partir de la proporcionalidad que existe entre los segmentos definidos por los puntos de intersección entre las secantes y la circunferencia. De esta manera, si unimos los puntos A con B y D con C se forman dos triángulos que son semejantes entre sí:



$\measuredangle FAB \cong \measuredangle FCD$ (Por ser ángulos que subtienden el mismo arco $\overset{\frown}{DB}$)

$\measuredangle AFB \cong \measuredangle CFD$ (Por ser ángulos comunes)

$\triangle AFB \sim \triangle CFD$ (Por el criterio de semejanza A-A)

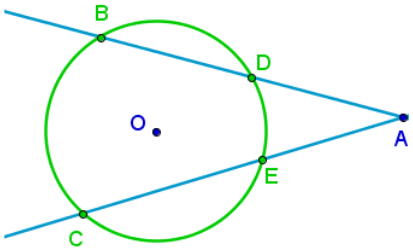
Por lo tanto, al ser semejantes los triángulos, tenemos que sus lados homólogos son proporcionales, en particular:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FD}}$$

$$\overline{AF}\cdot\overline{FD} = \overline{CF}\cdot\overline{FB}$$

✎ ***Ejemplo***

En la circunferencia de centro O de la figura, $\overline{AE} = 2\overline{EC}$, $\overline{AD} = 5$ y $\overline{DB} = 25$. ¿Cuánto mide $\overline{EC}$?



Solución: Para determinar el segmento EC haremos uso de la proporcionalidad entre secantes. Sea $\overline{EC} = x$ entonces $\overline{AE} = 2x$. Aplicando el teorema:

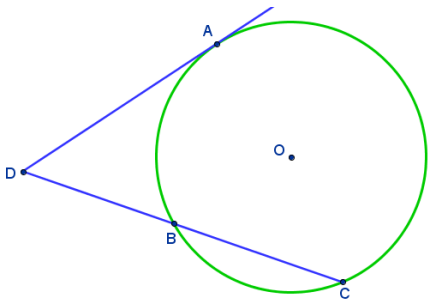
$$\begin{aligned} \overline{AD} \cdot \overline{AB} &= \overline{AE} \cdot \overline{AC} \\ 5 \cdot (5 + 25) &= 2x \cdot (2x + x) \\ 5 \cdot 30 &= 6x^2 \\ \frac{150}{6} &= x^2 \\ 25 &= x^2 \\ 5 &= x \end{aligned}$$

Finalmente, $\overline{EC} = 5$

---

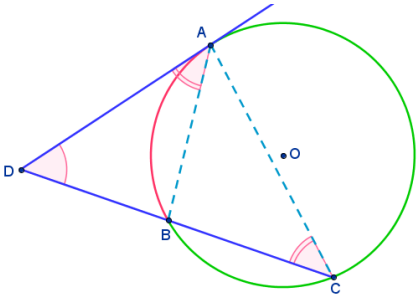
3. Proporcionalidad entre una secante y una tangente de una circunferencia

Si desde un punto D exterior a una circunferencia se trazan una secante que corta en los puntos B y C y una tangente que corta en el punto A, la medida de la tangente al cuadrado será igual al producto de la secante entera por su segmento exterior.



$$\overline{DA}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DC}$$

Esta relación surge a partir de la proporcionalidad que existe entre los segmentos definidos por los puntos de intersección entre la secante y la circunferencia y por el segmento definido por la tangente a esta. De esta manera, si unimos los puntos A con C y A con B se forman dos triángulos que son semejantes entre sí:



$\measuredangle DCA \cong \measuredangle DAB$ (Por ser ángulos que subtienden el mismo arco $\overset{\frown}{DB}$)
$\measuredangle CDA \cong \measuredangle ADB$ (Por ser ángulos comunes)

$\triangle ADB \sim \triangle CDA$ (Por el criterio de semejanza A-A)

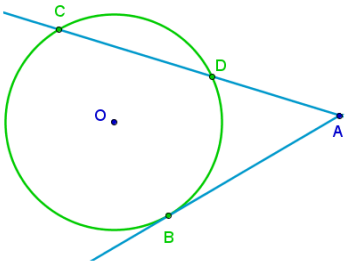
Por lo tanto, al ser semejantes los triángulos, tenemos que sus lados homólogos son proporcionales, en particular:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

$$\overline{CD} \cdot \overline{DB} = (\overline{AD})^2$$

✎ ***Ejemplo***

En la circunferencia de centro O de la figura, $\overline{AB} = 6$ y $\overline{AD} = 3$.
¿Cuánto mide $\overline{DC}$?



Solución: Para determinar el segmento DC haremos uso de la proporcionalidad entre una secante y una tangente. Sea $\overline{AC} = x$ tenemos lo siguiente:

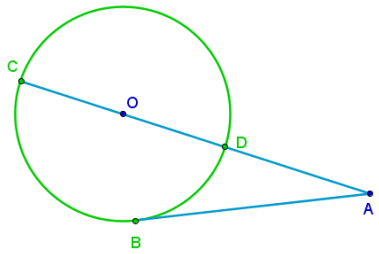
$$\begin{aligned} \overline{AD} \cdot \overline{AC} &= (\overline{AB})^2 \\ 3 \cdot (3 + x) &= 6^2 \\ 3 + x &= \frac{36}{3} \\ 3 + x &= 12 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Finalmente, $\overline{AC} = 9$

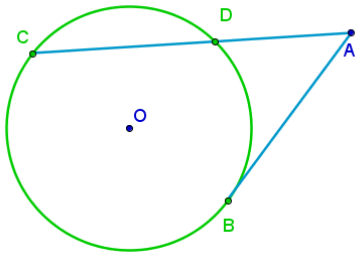
✍ *Ejercicios*

Resolver los siguientes ejercicios relacionados con la circunferencia de centro O.

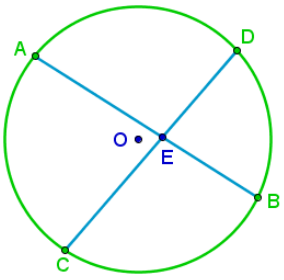
1. Si $\overline{DC}$ es diámetro de la circunferenia, ¿cuánto mide su radio si $\overline{AB} = 10$ y $\overline{AD} = 4$



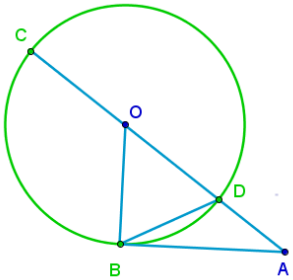
2. Si $\overline{AD} = 3$ y $\overline{DC} = 5\overline{AD}$, ¿cuánto mide $\overline{AB}$?



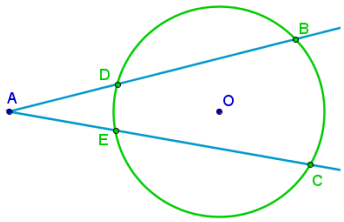
3. Si $\overline{AE} : \overline{DE} = 3 : 2$ y $\overline{EC} = 8$, ¿cuánto mide $\overline{EB}$?



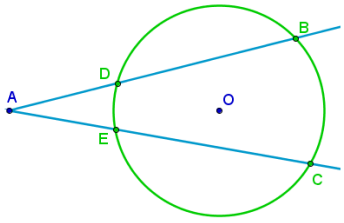
4. Si $\overline{CB} = 12$, $\overline{BD} = \overline{DA} = 7$, ¿cuánto mide $\overline{BA}$?



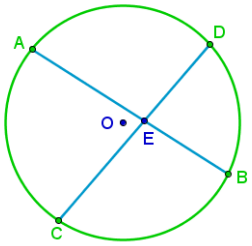
5. Si $\overline{AD} = 10$, $\overline{DB} = 22$ y $\overline{EC} = 30$, ¿cuánto mide $\overline{AE}$?



6. En la figura $\overline{AE} : \overline{EC} = 1 : 3$. Si $\overline{AD} = 4$ y $\overline{AE} = 9$, ¿cuánto mide $\overline{DB}$?



7. En la figura las circunferencias con centro O y O_1 son tangentes en el punto A. Si $\overline{BD} = 4$, $\overline{DC} = 6$ y $\overline{FE} = 8$, ¿cuánto mide $\overline{BF}$?



Bibliografía

[1] Manual de preparación PSU Matemática, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.

[2] Desarrollo del pensamiento matemático, La circunferencia y el círculo, No 15, *Marzo 2007*,
Martín Andonegui Zabala.