open green road

Guía Matemática

INECUACIONES

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Orden en $\mathbb{R}$

Consideremos un conjunto compuesto por símbolos no numéricos como el siguiente:

$$A = \{\text{Œ},\ \emptyset,\ !,\ \#,\ \text{Æ},\ \text{ø}\}$$

No es posible **ordenar** el conjunto en base a algún parámetro bien definido, porque los elementos no cumplen ningún axioma o teorema que nos aclare cómo están construidos. En otras palabras, no podemos definir si un elemento es mayor o menor a otro.

Por otro lado, todo elemento del conjunto de los números reales cumple con la **ley de tricotomía**, la cual dice que si tomamos un número cualquiera de $\mathbb{R}$ éste cumplirá con una y sólo una de las siguientes afirmaciones: será igual a cero ó mayor a cero ó menor que cero. En simbología algebraica:

***Ley de tricotomía**: Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las afirmaciones:*

i. $a = 0$

ii. $a < 0$

iii. $a > 0$

Los símbolos $>$ "mayor que" y $<$ "menor que" denotan una relación de orden entre los elementos.

1.1. Definición de los símbolos de desigualdad

Para $a,\ b \in \mathbb{R}$ la relación de desigualdad denotada por los símbolos $>$ y $<$ se define como:

i. $a > b$ si y sólo si $a - b > 0$

ii. $a < b$ si y sólo si $a - b < 0$

En base a lo anterior, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ cumple con una serie de propiedades de **orden** que nos permite decir que $\mathbb{R}$ es un conjunto **ordenado.** Esto quiere decir que para cualesquiera dos elementos $a,\ b \in \mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

i. $a = b$ $\quad$ a es **igual** que b

ii. $a < b$ $\quad$ a es **menor** que b

iii. $a > b$ $\quad$ a es **mayor** que b

Este teorema nos asegura que siempre podremos encontrar una **relación de orden** entre dos elementos del conjunto de los números reales. Además para $a, b \in \mathbb{R}$ se define:

$$a \geq b \text{ si y sólo si } a > b \text{ ó } a = b$$

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a < b \text{ ó } a = b$$

1.2. Teoremas básicos de desigualdades

A continuación enumeramos una serie de teoremas sobre las relaciones de orden. Por el enfoque del documento las demostraciones quedan como trabajo sugerido para el lector[1].

I.- Para cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \leq b$ si y sólo si $a + c \leq b + c$

Esta doble implicancia la podemos entender así: "Si tengo una cantidad a menor o igual a otra b, entonces la desigualdad se mantendrá si a ambas cantidades les sumo la misma cantidad c".

Si leemos la doble implicancia de derecha a izquierda podemos entenderla así: "Si una cantidad $a+c$ es menor o igual a $b+c$, entonces también será cierto que a es menor o igual a b".

Este teorema nos permitirá sumar o restar en una desigualdad y mantener el sentido de ésta.

II.- Para cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$a)$ Si $a \leq b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$

$b)$ Si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c \geq b \cdot c$

En palabras simples, si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número positivo $c > 0$, entonces el signo de la desigualdad se mantiene, pero si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número negativo $c < 0$, entonces el signo de la desigualdad se invierte.

III.- Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

IV.- $a \cdot b > 0$ si y sólo si $(a > 0$ y $b > 0)$ ó $(a < 0$ y $b < 0)$

Es decir, si la multiplicación de dos cantidades es mayor que cero, entonces puede ser que ambas cantidades sean **mayores** que cero ó que ambas cantidades sean **menores** que cero.

V.- $a \cdot b < 0$ si y sólo si $(a > 0$ y $b < 0)$ ó $(a < 0$ y $b > 0)$

Es decir, si la multiplicación de dos cantidades es menor que cero, entonces la primera será mayor que cero y la segunda menor que cero ó la primera será menor que cero y la segunda mayor que cero.

VI.- Si $a > 0$, entonces $-a < 0$

VII.- Si $a < 0$, entonces $-a > 0$

VIII.- Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$

IX.- Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$

X.- Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a > b$ entonces $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

XI.- Si $a, b \in \mathbb{R}^-$ y $a > b$ entonces $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

XII.- Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^-$ entonces $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

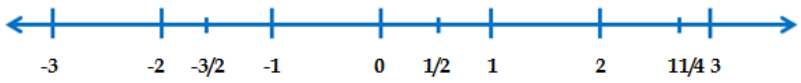
XIII.- Si $a \in \mathbb{R}^-$ y $b \in \mathbb{R}^+$ entonces $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

XIV.- Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces es siempre cierto que $a^2 > 0$

[1] Se recomienda revisar los apuntes de Cálculo I de USACH escritos por Gladys Bobadilla.

2. Intervalos

Como el conjunto de los reales $\mathbb{R}$ es un conjunto **ordenado**, podemos asignar una posición a cada elemento y decir cuál está antes y después de otro. Este hecho nos permite representar a $\mathbb{R}$ como una recta con infinitos puntos.



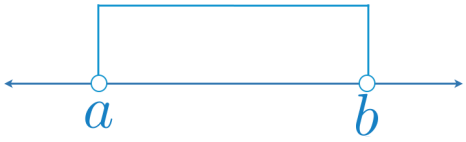
Si seleccionamos un segmento de esa recta numérica tendremos un conjunto infinito de puntos que es subconjunto de $\mathbb{R}$. Este segmento tendrá extremos definidos que determinarán a los elementos de ese subconjunto, por ejemplo:



Estamos considerando los números entre -3 y 1. A éste y cualquier otro subconjunto de los números reales lo denominamos **intervalo**. Existen muchos tipos de intervalos y maneras de representarlos, a continuación mostraremos las más comunes.

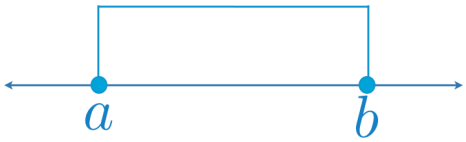
2.1. Intervalo abierto

Es aquel subconjunto de números reales que cumple con estar entre dos valores. Si $a < b$ decimos que un número x vive o pertenece al intervalo entre a y b cuando $x > a$ y $x < b$. La simbología del intervalo abierto entre a y b es $]a, b[$ y decimos que se compone de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$. Notar que los números a y b no pertenecen al intervalo abierto, a estos valores les llamaremos **límites del intervalo**. La representación gráfica de un intervalo $]a, b[$ es:



2.2. Intervalo cerrado

Es un subconjunto de números reales que cumplen con ser mayores o iguales que un número a y menores o iguales que otro número b donde $a < b$. En tal caso diremos que el intervalo cerrado de a a b se compone de todos los x reales que $a \leq x \leq b$. Notar que los **límites** de un intervalo cerrado sí pertenecen al conjunto. La simbología es $[a, b]$ y su representación gráfica es:

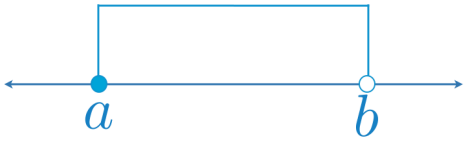


2.3. Intervalo semi abierto

Son intervalos en donde sólo uno de los dos **límites** del conjunto pertenece al intervalo.

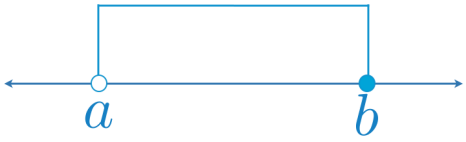
2.3.1. Intervalo semi abierto por la derecha

Para $a < b$ es el intervalo compuesto por todos los números x tales que $a \leq x < b$. En este tipo de intervalo el extremo derecho no pertenece al conjunto. La simbología es $[a, b[$ y su representación gráfica es:



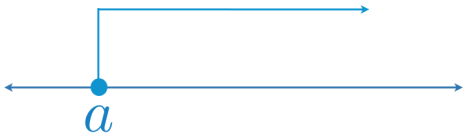
2.3.2. Intervalo semi abierto por la izquierda

Para $a < b$ es el intervalo compuesto por todos los números x tales que $a < x \leq b$. En este tipo de intervalo el extremo izquierdo no pertenece al conjunto. La simbología es $]a, b]$ y su representación gráfica es:

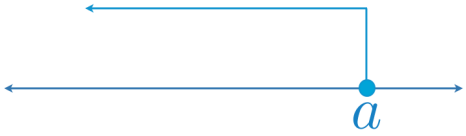


2.3.3. Intervalo sin límite superior o inferior

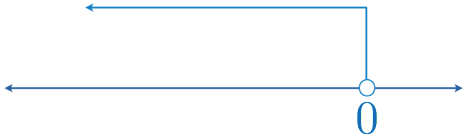
Son los intervalos que no tienen límite superior o inferior. Por ejemplo $x \geq a$ es el intervalo $[a, \infty_+[$ y no tiene límite superior. La representación gráfica es:



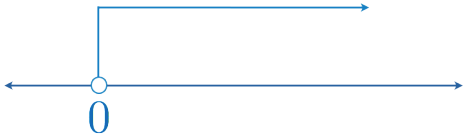
Otro ejemplo de intervalo sin límite inferior es el conjunto de todos los x que cumplen con $x \leq a$. El intervalo es $]_-\infty, a]$ y su representación gráfica es:



El conjunto de los reales negativos $\mathbb{R}^-$, el cual se define como todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < 0$, en simbología de intervalos es $]_-\infty, 0[$ y su representación gráfica es:



Otro ejemplo es el conjunto de los reales positivos $\mathbb{R}^+$, el cual se define como todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$. En simbología de intervalos es $]0, \infty_+[$. En estos últimos dos casos existe un límite inferior o superior, pero el otro extremo no está definido.



3. Inecuación lineal

Es una relación de **desigualdad** entre dos expresiones algebraicas en donde uno o más factores son desconocidos. En este sentido es similar a una ecuación, pero hay diferencias en el modo de trabajar las expresiones para "despejar" la incógnita y en el número de soluciones.

En las ecuaciones de primer grado con una incógnita la solución es un número o expresión particular, en cambio en las inecuaciones lo que encontramos es un **intervalo** numérico que cumple con las condiciones del problema.

Aplicando la misma operación a ambos miembros de la igualdad en una ecuación, ésta se mantiene sin variación, pero en las inecuaciones no ocurre lo mismo. Por el **Teorema II-b** sabemos que al multiplicar por una cantidad negativa ambos miembros de una desigualdad, ésta cambia de sentido.

✎ ***Ejemplo***

1. *Encuentra el conjunto solución de la inecuación* $3x - 11 > 4$

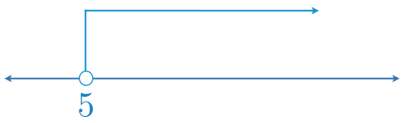
   Solución: Sumo 11 a ambos lados de la desigualdad.

   $$\begin{aligned} 3x - 11 &> 4 \\ 3x - 11 + 11 &> 4 + 11 \\ 3x &> 15 \end{aligned}$$

   Para despejar x divido ambos miembros de la desigualdad por 3. Como estoy dividiendo por una cantidad positiva el sentido de la desigualdad se mantiene.

   $$\begin{aligned} 3x &> 15 \\ x &> 5 \end{aligned}$$

   El conjunto solución son todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 5$, la representación como intervalo es $]5, \infty_+[$ y la gráfica es:

2. *Encuentra todos los valores de* y *que satisfacen la inecuación* $5y - 18 \leq 7y + 2$

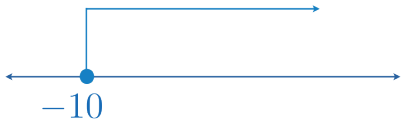
   Solución: Escribimos la incógnita a un lado de la desigualdad y los valores conocidos al lado opuesto. En las inecuaciones podemos "pasar" términos de un miembro al otro de igual modo como lo hacemos en una ecuación.

   $$\begin{aligned} 5y - 18 &\leq 7y + 2 \\ 5y - 18 - 7y &\leq 2 \\ -2y &\leq 2 + 18 \\ -2y &\leq 20 \end{aligned}$$

   Para despejar y debemos dividir por -2. Como es una cantidad negativa el signo de desigualdad se invierte.

   $$\begin{aligned} -2y &\leq 20 \\ \frac{-2y}{-2} &\geq \frac{20}{-2} \\ y &\geq -10 \end{aligned}$$

El conjunto solución son todos los $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \geq -10$, la representación como intervalo es $[-10, \infty_+[$ y la representación gráfica es:



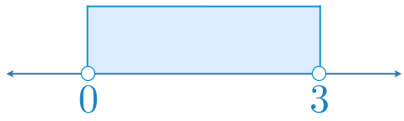
3. Determina la solución de $\dfrac{21}{x} > 7$

Solución: Notemos que la incógnita está en el denominador y para proceder debemos multiplicar por x los dos miembros de la desigualdad. En este caso debemos tener cuidado porque no sabemos si x es positivo o negativo, sólo podemos asegurar que $x \neq 0$. Como no podemos decir que $x > 0$ o < 0 entonces debemos estudiar los dos casos.

Caso I: Si $x > 0$ entonces podemos multiplicar por x y el sentido de la desigualdad se mantiene.

$$\begin{aligned} \frac{21}{x} &> 7 \\ \frac{21}{x} \cdot x &> 7 \cdot x \\ 21 &> 7x \\ \frac{21}{7} &> \frac{7x}{7} \\ 3 &> x \end{aligned}$$

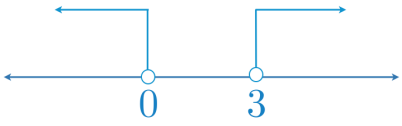
La primera solución preliminar son todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < 3$. Pero recordemos que la restricción del Caso I es que $x > 0$, entonces $0 < x < 3$. Gráficamente es:



Caso II: Si $x < 0$ entonces al multiplicar por x ambos miembros la desigualdad, el signo de la desigualdad se invertirá.

$$\begin{aligned} \frac{21}{x} &> 7 \\ \frac{21}{x} \cdot x &< 7 \cdot x \\ 21 &< 7x \\ \frac{21}{7} &< \frac{7x}{7} \\ 3 &< x \end{aligned}$$

La otra solución de esta inecuación son todos los números reales mayores que 3, pero la restricción del Caso II es que $x < 0$. Si graficamos ambas restricciones obtenemos lo siguiente:



Nos podemos dar cuenta que no hay intersección entre la solución de la inecuación y la restricción para el segundo caso, ya que no existe un número menor que cero y al mismo tiempo mayor que 3. Por lo tanto, el conjunto solución del Caso II es vacío, dicho de otra manera, no hay solución en el segundo caso.

Finalmente la solución del problema es la unión de las soluciones halladas en los dos casos, pero el segundo no aporta por ser vacío, entonces el intervalo solución es $]0, 3[$

4. *Resolver* $x^2 - 5 > 11$

Solución: Despejamos la incógnita de los términos numéricos.

$$x^2 > 16$$

Para continuar debemos aplicar raíz cuadrada a ambos lados, pero recordemos que $\sqrt{x^2} = |x|$

$$\begin{aligned} x^2 &> 16 \\ \sqrt{x^2} &> \sqrt{16} \\ |x| &> 4 \end{aligned} \tag{1}$$

Por el valor absoluto de x tendremos dos situaciones posibles: que $x > 0$ o que $x < 0$.

Caso I: Si $x > 0$ entonces $|x| = x$, por lo tanto, la desigualdad queda:

$$\begin{aligned} |x| &> 4 \\ x &> 4 \end{aligned} \tag{2}$$

La solución de este caso es el intervalo $]4, \infty_+[$

Caso II: Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$, por lo tanto, la desigualdad queda:

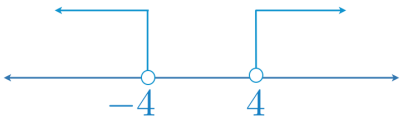
$$\begin{aligned} |x| &> 4 \\ -x &> 4 \\ x &< -4 \end{aligned} \tag{3}$$

La solución de este caso es el intervalo $]_-\infty, -4[$

Como puede ocurrir cualquiera de los dos casos, la solución final es la unión de las dos soluciones encontradas.

$$]_-\infty, -4[\cup]4, \infty_+[$$

Gráficamente la solución es:



En inecuaciones es común tener ejercicios donde no sabemos si la incógnita es mayor que cero **o** menor que cero. En tal caso en que las situaciones son **excluyentes**, la solución final será la **unión** de cada situación particular. Cuando hay más de una condición para la incógnita, por ejemplo que sea menor que 10 **y** al mismo tiempo sea menor que 3, la solución final será la **intersección** de las soluciones de cada condición.

✍ ***Ejercicios*** **1**

Hallar el intervalo de valores que satisfacen cada inecuación y dibujar su representación gráfica.

1. $3x - 6 \leq 30$
2. $18 + x > 2x$
3. $\frac{1}{2} - 3x \geq \frac{2}{3} + x$
4. $\frac{x}{12} \leq x - 8$
5. $x^2 - 12 > 13$
6. $\frac{1}{x} > -9$
7. $|x| \leq 12$
8. $\frac{4}{3}x - 1 > x$

De modo general, para los valores absolutos se puede demostrar que:

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \iff x \geq a \text{ ó } x \leq -a$$

4. Sistema de inecuaciones con una incógnita

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de condiciones de desigualdad que deben cumplir las incógnitas. En nuestro caso sólo estudiaremos los sistemas de inecuaciones con una incógnita. Para este tipo de sistemas con una incógnita la solución se obtendrá en dos pasos:

- Resolver cada inecuación por separado.
- Hallar la intersección de los intervalos solución de cada inecuación del sistema.

La solución del sistema de inecuaciones es el conjunto intersección de las soluciones particulares de cada desigualdad.

✎ ***Ejemplo***

Resolver el sistema $\begin{array}{rcrcr} x & - & 4 & > & 11 + 2x \\ 8 & + & 5x & < & 0 \end{array}$

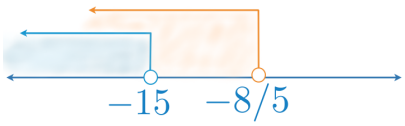
Solución: Resolviendo la primera inecuación.

$$\begin{aligned} x - 4 &> 11 + 2x \\ -4 &> 11 + 2x - x \\ -4 - 11 &> x \\ -15 &> x \end{aligned}$$

De la primera desigualdad desprendemos que una de las condiciones que debe cumplir x es ser menor a -15. Al resolver la segunda inecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} 8+5x &< 0 \\ 5x &< -8 \\ x &< -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

De la segunda desigualdad desprendemos que la otra condición es que x sea menor a $-\frac{8}{5}$. La solución del sistema de inecuaciones es igual a la intersección de los dos intervalos encontrados. Al hacer la representación gráfica de los dos intervalos es fácil ver cuál es la solución.



La intersección de ambos intervalos y solución del sistema de inecuaciones es $]-\infty, -15[$

✍ *Ejercicios* 2

Resuelve los sistemas de inecuaciones escribiendo el intervalo solución y su representación gráfica.

1. $\begin{array}{rcrcl} 2 & - & 3x & < & x \\ x & + & 12 & > & 12 \end{array}$

2. $\begin{array}{rcrcl} |x| & + & 2 & > & 3 \\ 2x & + & 3 & > & 0 \end{array}$

3. $\begin{array}{rcrcl} 2x & + & \frac{1}{2} & \leq & 3 \\ 11 & + & x & > & 0 \end{array}$

4. $\begin{array}{rcrcl} \frac{3}{x} & + & 1 & > & 0 \\ x^2 & - & 16 & > & 0 \end{array}$

Bibliografía

[1] Álgebra, *Edición 1983*, CODICE S.A. Madrid (1983)
Dr. Aurelio Baldor.

[2] Aritmética, *Edición 1983*, CODICE S.A. Madrid (1983)
Dr. Aurelio Baldor.