open green road

Guía Matemática

PROBABILIDAD CONDICIONADA

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.cl

Como bien sabemos, las probabilidades están ligadas a la ignorancia que poseemos los seres humanos para determinar ciertos resultados con exactitud, de esta forma mientras mayor información manejamos sobre un suceso más certeros podemos ser en nuestras deducciones.

A partir de esto podemos decir que el valor que toman las probabilidades depende del grado de información que tengamos del suceso observado en un experimento, de esta manera cuando se está calculando la probabilidad de un suceso A, sabiendo que ocurrió un suceso B, la información va restringiendo nuestro espacio muestral, haciendo más probable la ocurrencia de un suceso en particular. Este tipo de cálculo probabilístico se conoce como **"Probabilidad Condicionada"** y es la que estudiaremos a continuación.

1. Probabilidad condicionada

En ocasiones, uno está interesado en calcular la probabilidad de un suceso dada la ocurrencia de otro suceso, por ejemplo en el juego de cartas "Blackjack.[el] jugador va observando las cartas que van saliendo para calcular la probabilidad de las cartas que necesita para realizar su apuesta. En estas situaciones estamos hablando de probabilidades condicionadas.

Este tipo de probabilidades se denota por $P(A|B)$, en donde A es el suceso de la probabilidad que deseamos calcular y B es el suceso que condiciona la probabilidad a calcular. La expresión se lee "probabilidad del suceso A dado el suceso B", es decir, la probabilidad de A condicionada por B.

1.1. Probabilidad condicionada en sucesos dependientes

Cuando tengamos que calcular la probabilidad de un suceso A sabiendo que ha ocurrido un suceso B, la probabilidad condicionada del suceso A por B se calculará dividiendo la probabilidad de que ocurran ambos sucesos juntos por la probabilidad de que ocurra el suceso B.

*Si dos sucesos A y B son **dependientes**, entonces la probabilidad de que ocurra el suceso A, sabiendo que ha ocurrido el suceso B es:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} \quad con \quad P(B) \neq 0$$

✎ ***Ejemplo***

La siguiente tabla muestra los resultados de 4 grupos de personas que fueron a rendir el examen práctico para obtener la licencia de conducir clase B:

Curso	Aprobados	Reprobados
Grupo 1	40	5
Grupo 2	35	7
Grupo 3	46	12
Grupo 4	50	5

Basándose en los resultados de la tabla, si se selecciona una persona al azar:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado sabiendo que es del grupo 3?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo 1 si la persona escogida reprobó el examen?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona escogida haya reprobado el examen si rindió la prueba con el grupo 1?

Solución: Analicemos por pregunta:

1. En ese caso nos están preguntado la probabilidad del suceso $A =$ "aprobó el examen de conducir" con la condición $B =$ "pertenece al grupo 3", por lo tanto, estamos frente una probabilidad condicional. Calculemos las probabilidades que necesitamos:

   - Probabilidad de que la persona pertenezca al grupo 3: En este suceso tenemos 58 personas que pertenecen al grupo 3 de un total de 200 personas que rindieron el examen, por lo tanto:

   $$P(B) = \frac{58}{200} = \frac{29}{100}$$

   - Probabilidad de que la persona pertenezca al grupo 3 y que haya aprobado el examen de conducir: En este suceso tenemos 46 personas que aprobaron el examen del grupo 3 de un total de 200 personas que rindieron el examen, por lo tanto:

   $$P(A \wedge B) = \frac{46}{200} = \frac{23}{100}$$

   Ahora calculamos la probabilidad condicionada:

   $$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

   $$P(A|B) = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{29}{100}}$$

   $$P(A|B) = \frac{23}{29}$$

   Finalmente, la probabilidad de que la persona escogida al azar haya aprobado el examen de conducir sabiendo que pertenecía al grupo 3 es de $P(A|B) = \frac{23}{29}$.

2. En ese caso nos están preguntado la probabilidad del suceso $A =$ "pertenece al grupo 1" con la condición $B =$ "reprobó el examen", por lo tanto, estamos frente una probabilidad condicional. Calculemos las probabilidades que necesitamos:

   - Probabilidad de que la persona reprobara el examen: En este suceso tenemos 29 personas que reprobaron el examen de un total de 200 personas que lo rindieron, por lo tanto:

   $$P(B) = \frac{29}{200}$$

- Probabilidad de que la persona pertenezca al grupo 1 y que haya reprobado el examen de conducir: En este suceso tenemos 5 personas que reprobaron el examen del grupo 1 de un total de 200 personas que rindieron el examen, por lo tanto:

$$P(A \wedge B) = \frac{5}{200}$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$
$$P(A|B) = \frac{5}{100} : \frac{29}{200}$$
$$P(A|B) = \frac{5}{29}$$

Finalmente, la probabilidad de que la persona escogida al azar haya pertenecido al grupo 1 sabiendo que reprobó el examen de conducir es de $P(A|B) = \frac{5}{29}$.

3. En ese caso nos están preguntado la probabilidad del suceso B = "reprobó el examen" con la condición A = "pertenece al grupo 1", por lo tanto, estamos frente una probabilidad condicional. Calculemos las probabilidades que necesitamos:

- Probabilidad de que la persona pertenezca al grupo 1: En este suceso tenemos 45 personas que pertenecen al grupo 1 de un total de 200 personas que rindieron el examen de conducir, por lo tanto:

$$P(A) = \frac{45}{200}$$

- Probabilidad de que la persona pertenezca al grupo 1 y que haya reprobado el examen de conducir: En este suceso tenemos 5 personas que reprobaron el examen del grupo 1 de un total de 200 personas que rindieron el examen, por lo tanto:

$$P(A \wedge B) = \frac{5}{200}$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}$$
$$P(B|A) = \frac{5}{200} : \frac{45}{200}$$
$$P(B|A) = \frac{5}{45}$$
$$P(B|A) = \frac{1}{9}$$

Finalmente, la probabilidad de que la persona escogida al azar haya reprobado el examen de conducir sabiendo que pertenecía al grupo 1 es de $P(B|A) = \frac{1}{9}$.

Con el item 2. y 3. podemos darnos cuenta de que $P(A|B) \neq P(B|A)$.

✍ ***Ejercicios*** **1**

1. *Se lanzan dos dados no cargados de seis caras simultáneamente. Si se obtiene un 7 en la suma de los puntos de las caras superiores de ambos dados, ¿cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 2?*

2. *Se extraen dos cartas al azar de una baraja española. Si apareció un caballo en la primera extracción, ¿cuál es la probabilidad de volver a obtener un caballo en la segunda extracción si la primera carta se devuelve a la baraja?*

3. *En una tómbola están todos los números naturales comprendidos entre el 4 y el 55. Si se saca un número al azar y se obtiene un divisor de 80, ¿cuál es la probabilidad de que ese número sea primo? y ¿cuál es la probabilidad de que el número no sea divisible por 5?*

4. *En un hotel hay habitaciones disponibles para 4 y 6 personas cada una. De ella algunas tienen el baño compartido y otras un baño privado. La tabla que se muestra a continuación resume esta información:*

Personas por habitación	**Habitaciones con baño compartido**	**Habitaciones con baño privado**
4	28	40
6	12	35

   a) Si una persona reserva una habitación al azar y al llegar al lugar descubre que es para 6 personas, ¿cuál es la probabilidad de que sea con baño privado?

   b) Si una persona reserva una habitación al azar y al llegar al lugar descubre que es con baño privado, ¿cuál es la probabilidad de que sea para 6 personas?

   c) Si una persona reserva una habitación al azar y al llegar al lugar descubre que es para 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que sea con baño compartido?

1.2. Probabilidad sin restitución

Es probable que en numerosas situaciones nos pregunten por probabilidades de ciertos sucesos en que el espacio muestral se ve disminuido ya que los elementos escogidos no se devuelven, cuando eso pasa estamos frente a problemas de probabilidades sin restitución, a continuación mostraremos como se trabaja en estos casos.

✎ ***Ejemplo***

Se sacan dos cartas al azar de un naipe inglés sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una As negro y un 8?



Solución: Como vemos nos están pidiendo que se cumplan dos cosas: Que una carta sea un As negro y que la otra sea un 8. El enunciado no nos indica el orden en el cual deben salir las cartas, sin embargo, nos dice que no se devuelven a la baraja, por lo tanto tenemos dos opciones:

Opción 1: Sacar primero un 8 **y** luego un As negro.

- Probabilidad de obtener un 8 ($P(B)$):

$$P(8) = \frac{4}{52}$$

- Probabilidad de obtener un As negro siendo que ya salió un 8 ($P(A|B)$): Como ya sacamos una carta nuestro espacio muestral se reduce en una unidad quedando en 51 cartas de las cuales 2 cartas corresponden a ases negros.

$$P(\text{As negro}) = \frac{2}{51}$$

A partir de los cálculos anteriores, la probabilidad de sacar primero un 8 y luego un As negro es:

$$\begin{aligned}
P(A \wedge B) &= P(A|B) \cdot P(B) \\
P(\text{As negro y 8}) &= P(\text{ Obtener un As negro después de sacar un 8}) \cdot P(\text{Obtener un 8}) \\
P(\text{As negro y 8}) &= \frac{2}{51} \cdot \frac{4}{52} \\
P(\text{As negro y 8}) &= \frac{8}{51 \cdot 52} \\
P(\text{As negro y 8}) &= \frac{8}{2.652}
\end{aligned}$$

- **Opción 2:** Sacar primero un As negro **y** luego un 8. En este caso tendríamos lo siguiente:

  - Probabilidad de obtener un As negro ($P(B)$):

$$P(\text{As negro}) = \frac{2}{52}$$

  - Probabilidad de obtener un 8 siendo que ya salió un As negro ($P(A|B)$): Como ya sacamos una carta nuestro espacio muestral se reduce en una unidad quedando en 51 cartas.

$$P(8) = \frac{4}{51}$$

Por lo tanto, la probabilidad de sacar primero un As negro y luego un 8 es de:

$$
\begin{aligned}
P(A \wedge B) &= P(A|B) \cdot P(B) \\
P(\text{As negro y 8}) &= P(\text{Obtener un 8 sacado un As negro}) \cdot P(\text{Obtener un As}) \\
P(\text{As negro y 8}) &= \frac{4}{51} \cdot \frac{2}{52} \\
P(\text{As negro y 8}) &= \frac{8}{51 \cdot 52} \\
P(\text{As negro y 8}) &= \frac{8}{2.652}
\end{aligned}
$$

Como no nos especifican el orden, ambas opciones nos sirven, por lo tanto, es la "Opción 1" **o** la "Opción 2" así que para obtener nuestra probabilidad final tenemos que sumar las dos probabilidades correspondientes a cada caso:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{8}{2.652} + \frac{8}{2.652} \\
P &= 2 \cdot \frac{8}{2.652} \\
P &= \frac{16}{2.652} \\
P &= \frac{4}{663}
\end{aligned}
$$

Finalmente la probabilidad de sacar un As negro y un 8 es de $\frac{4}{663}$

Desafío I



Un negocio que vende cámaras digitales obtiene la mitad de sus productos en una fábrica chilena, otro 15 % de sus productos los obtiene de una fábrica china y el resto en una fábrica inglesa. Se sabe además que las mujeres compran 30 % de las cámaras provenientes de la fábrica chilenas, 60 % de los productos provenientes de la fábrica china y un 40 % de las cámaras de la fábrica inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente masculino compre una cámara digital proveniente de la fábrica china? Respuesta

✍ *Ejercicios* 2

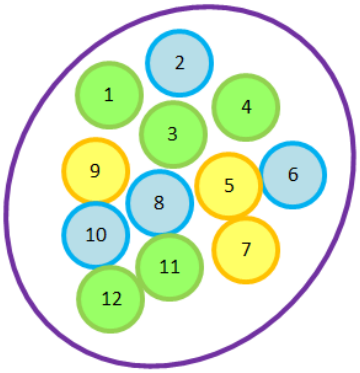
1. *Una bolsa contiene 12 fichas tal como se muestra en la figura. Si se sacan dos fichas al azar sin devolverlas a la bolsa:*

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que éstas sean alternativamente de distinto color?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sacar primero un número primo y luego una ficha amarilla?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que éstas sean un número par y celeste?

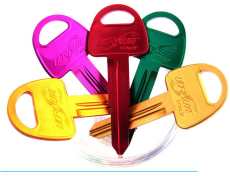
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que éstas sean un múltiplo de 3 y un primo ?



2. Una familia está compuesta por 16 personas tal como se muestra en la figura. Si se escogen al azar 3 personas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean hombres? Y si se escogen al azar 2 personas, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto sexo?

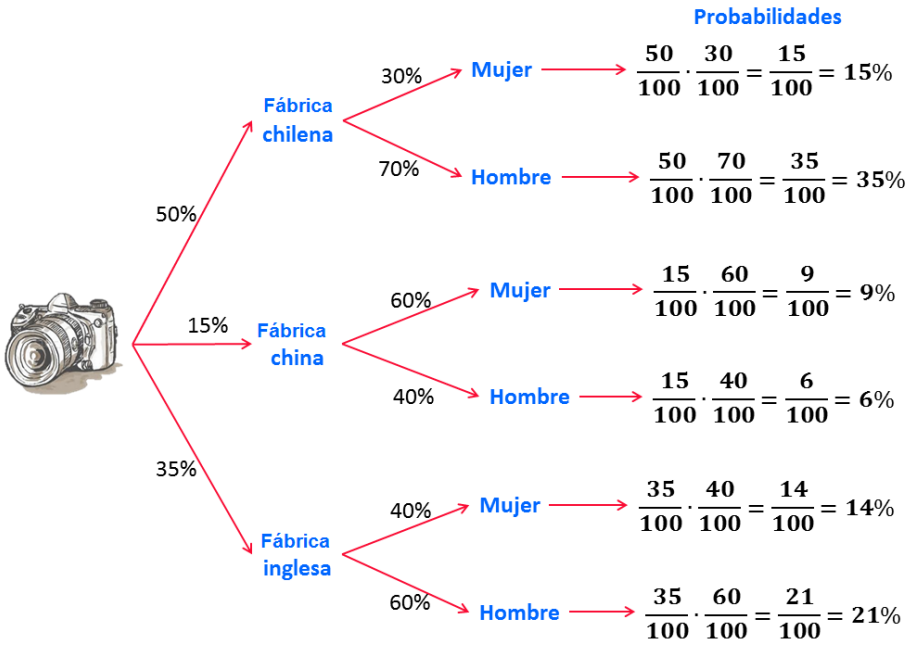


3. Javiera tiene 5 llaves y sólo una de ellas abre el casillero donde tiene su computador. ¿Cuál es la probabilidad de que logre abrir el casillero en el tercer intento si sólo prueba las llaves una única vez?



Desafíos resueltos

✓ Desafío I: Lo que nos piden calcular es una probabilidad condicionada, por lo cual utilizaremos la expresión antes vista.
En el ejercicio se nos pide calcular la probabilidad del suceso A =“Comprar una cámara digital proveniente de la fábrica china” con la condición B =“Un hombre compra la cámara digital”. A través de un diagrama de árbol ilustraremos los datos entregados por el problema para así calcular las probabilidades que necesitamos:



- Probabilidad de que compre un hombre una cámara digital: En este caso al observar el diagrama del árbol vemos que tenemos 3 posibles probabilidades que apuntan a este suceso, que el hombre compre una cámara digital chilena, inglesa o china, por lo tanto, debemos sumar esas 3 probabilidades:

$$P(\text{un hombre compre una cámara}) = 35\,\% + 6\,\% + 21\,\%$$
$$P(\text{un hombre compre una cámara}) = 62\,\%$$

- Probabilidad de que un hombre compre una cámara digital y que está sea proveniente de una fábrica china: Al observar el diagrama vemos que la probabilidad de que este suceso ocurra es de un $6\,\%$

Ahora utilizando la expresión para probabilidades condicionadas, tenemos lo siguiente:

$$P(\text{un hombre compre una cámara china}) = \frac{6\,\%}{62\,\%}$$
$$P(\text{un hombre compre una cámara china}) = \frac{3}{31}$$
$$P(\text{un hombre compre una cámara china}) \approx 0,097$$
$$P(\text{un hombre compre una cámara china}) \approx 9,7\,\%$$

Finalmente, la probabilidad de que un hombre compre una cámara china es de un $9,7\,\%$ aproximadamente. Volver

Bibliografía

[1] Manual de preparación PSU Matemática, *Quinta Edición*,
Oscar Tapía Rojas, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, David López, Jorge Olivares Sepúlveda.

[2] Introducción a la Estadística, *Segunda Edición, 2007*,
Sheldom M.Ross.