open green road

Guía Matemática

OPERATORIA ALGEBRAICA

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Operatoria de expresiones algebraicas

En esta guía abordaremos la generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos, la transformación de expresiones algebraicas por eliminación de paréntesis, por reducción de términos semejantes y por factorización. También veremos la convención del uso de los paréntesis.

2. Reducción de términos semejantes

Esta operación consiste en reescribir una expresión algebraica de una forma más simple, convirtiendo dos o más términos semejantes en uno solo. La reducción de términos semejantes puede diferenciarse en dos casos, pero todos se resumen en uno.

☞¡Mira!

2.1. Reducción de términos semejantes del mismo signo

Cuando tenemos una expresión algebraica con términos semejantes del mismo signo, se suman sus coeficientes numéricos conservando el signo que tienen ambos y al lado se escribe la parte literal.

✎ ***Ejemplo***

Reescribir cada expresión en su forma más simple

1. $2x + x = 3x$
2. $-\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a = -a$
3. $1,1z^{-2} + 0,5z^{-2} = 1,6z^{-2}$
4. $2y^{x-2} + 5y^{x-2} = 7y^{x-2}$
5. $-m - 2m - 10m = -13m$
6. $\frac{1}{2}xy + \frac{1}{6}xy = \frac{2}{3}xy$
7. $\frac{1}{2}m^2n + \frac{1}{3}m^2n + \frac{1}{4}m^2n + \frac{1}{6}m^2n = \frac{5}{4}m^2n$

✍ ***Ejercicios*** ***1***

Reduce las expresiones a su forma más simplificada

1. $2a + 3a$
2. $-12x - 3x$
3. $-b - 9b$
4. $-12n^2 - 3n^2$
5. $\frac{1}{2}a^x + \frac{5}{3}a^x$
6. $6m^{x+1} + 8m^{x+1}$
7. $\frac{3}{7}mn^{-2} + \frac{1}{3}mn^{-2}$
8. $-\frac{7}{8}a - a$
9. $-13p - 11p - p$
10. $12x^{m+1} + x^{m+1} + 6x^{m+1}$
11. $\frac{2}{5}ax + \frac{1}{3}ax + \frac{3}{4}ax$

2.2. Reducción de términos semejantes de distinto signo

Cuando tenemos una expresión algebraica con términos semejantes de diferente signo, se restan sus coeficientes numéricos conservando el signo del mayor y al lado se escribe la parte literal.

✎ *Ejemplo*

Reescribir cada expresión en su forma más simple

1. $2x - x = x$
2. $-\frac{4}{3}a + \frac{1}{3}a = -a$
3. $1,2z^{-2} - 0,5z^{-2} = 0,7z^{-2}$
4. $17y^{x-2} - 5y^{x-2} = 12y^{x-2}$
5. $-m + 2m - 10m = -9m$
6. $\frac{1}{3}xy - \frac{1}{5}xy = \frac{2}{15}xy$
7. $\frac{1}{2}m^2n + \frac{1}{3}m^2n + \frac{1}{4}m^2n - \frac{1}{6}m^2n = \frac{11}{12}m^2n$

Notar que de acá podemos desprender que dos términos semejantes con igual coeficiente numérico y literal, pero diferente signo, se anulan, es decir:

$$-16xy + 16xy = 0$$

$$-\frac{11}{15}m + \frac{11}{15}m = 0$$

✍ *Ejercicios* ***2***

Reduce las expresiones a su forma más simplificada

1. $7a - 2a$
2. $-12x + 5x$
3. $-r + 9r$
4. $12nx^2 - 30nx^2$
5. $\frac{11}{3}a^x - \frac{5}{3}a^x$
6. $17m^{x-1} - 19m^{x-1}$
7. $-\frac{4}{7}mn^{-3} + \frac{5}{3}mn^{-3}$
8. $-\frac{7}{8}a + a$
9. $-20p + 30p + 15p$
10. $0,5x^{pq+1} - \frac{1}{2}x^{pq+1} + 6x^{pq+1}$
11. $\frac{6}{5}ax^2z + \frac{4}{3}ax^2z + \frac{3}{2}ax^2z$

2.3. Reducción de un polinomio que contiene términos semejantes de varias clases

Consideremos el siguiente polinomio $3a + 5b - 3c + 5a + b - c - 2b$ Nuestro objetivo es reducirlo mediante la adición y sustracción de términos semejantes. Para esto agruparemos los términos semejantes aplicando la propiedad de la *asociatividad* para la adición en el álgebra y luego utilizamos alguno de los dos procedimientos descritos anteriormente para cada clase de términos semejantes.

$$\begin{aligned} 3a + 5b - 3c + 5a + b - c - 2b &= 3a + 5a + 5b + b - 2b - 3c - c \\ &= 8a + 4b - 4c \end{aligned}$$

✎ ***Ejemplo***

Reducir el polinomio $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+2a-3b-\frac{3}{4}a-\frac{1}{6}b+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+2a-3b-\frac{3}{4}a-\frac{1}{6}b+\frac{3}{4}-\frac{1}{2} &= \\ &= \frac{1}{2}a-\frac{3}{4}a+2a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{6}b-3b+\frac{3}{4}-\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}a+2a+\frac{1}{6}b-3b+\frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{4}a-\frac{17}{6}b+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

2.4. Eliminación de signos de agrupación

Los paréntesis o signos de agrupación son usados en matemática para indicar que las cantidades que se encierran en ellos deben considerarse como un único término o cantidad. Los símbolos más usados son: el paréntesis redondo ( ), el corchete [ ] y las llaves { }. Por ejemplo, $2a+(b-c)$ es equivalente a $2a+(+b-c)$ lo que quiere decir que al doble de a le sumamos la diferencia entre b y c. Esta expresión es equivalente a escribir $2a$ acompañado de los términos del paréntesis con **su propio signo**.

☞¡Mira!

$$2a+b-c$$

Si ahora tenemos la expresión $m+(-2n+p)$, es lo mismo que escribir m acompañado de cada término del paréntesis con **su propio signo**.

$$m-2n+p$$

Para eliminar paréntesis que están precedidos por un $+$, se deja el mismo signo que tenga cada término dentro del paréntesis.

Para el siguiente caso $2a-(b+c)$, es equivalente a escribir $2a-(+b+c)$ que indica que a $2a$ le restamos la suma de b y c. Tal expresión es igual a escribir $2a$ acompañado de cada sustraendo del paréntesis con **signo opuesto**.

$$2a-b-c$$

Entonces $m-(-2n+p)$ será equivalente a escribir m acompañado de cada sustraendo con **signo opuesto**.

$$m+2n-p$$

Para suprimir paréntesis precedidos de $-$ se invierte el signo de cada término dentro del paréntesis.

✎ *Ejemplo*

Simplificar la expresión $-(a+b)+(-a-b)-(-b+a)+(3a+b)$

Solución: Eliminamos cada paréntesis según corresponda y sumamos los términos semejantes:

$$\begin{aligned}-(a+b)+(-a-b)-(-b+a)+(3a+b) &= -a-b+(-a-b)-(-b+a)+(3a+b)\\ &= -a-b-a-b-(-b+a)+(3a+b)\\ &= -2a-2b+b-a+(3a+b)\\ &= -3a-b+3a+b\\ &= 0\end{aligned}$$

En el caso de haber paréntesis incluidos dentro de otros signos de agrupación, es recomendable eliminar un paréntesis por paso comenzando por el más interior. Veamos el siguiente ejemplo:

$$5x+\{-3y-[-x+(12y-x-y)]\}$$

Primero eliminamos el paréntesis redondo

$$5x+\{-3y-[-x+12y-x-y]\}$$

Reducimos los términos semejantes

$$5x+\{-3y-[11y-2x]\}$$

Eliminamos el paréntesis de corchete

$$5x+\{-3y-11y+2x\}$$

Reducimos términos semejantes

$$5x+\{-14y+2x\}$$

Eliminamos el paréntesis de llave

$$5x-14y+2x$$

Finalmente reducimos términos semejantes

$$7x-14y$$

✍ *Ejercicios* *3*

Simplifica las expresiones suprimiendo paréntesis y reduciendo términos semejantes

1. $3a+[2a-(a+b)]$
2. $3x-[2y+x-(-y+3x)]$
3. $16m-[(4m-4n)-(21m-4n)]$
4. $-[-(2x^2-xy)+(4y^2-2xy)-(-7x^2+y^2)]$
5. $a+\{(-2a+3b)-(-a+b-c)-c\}$
6. $-\{-[-(a-b)]\}-\{[-(-a+b)]\}$
7. $-[-a+\{-a+(a-b)-[a-b-c]-[-(-a)+b]\}]$

3. Multiplicación

Es una operación matemática que consta de dos elementos llamados **multiplicando** y **multiplicador** o simplemente **factores**. Al resultado de la multiplicación se le llama **producto**. La multiplicación en el álgebra cumple con las mismas propiedades de la multiplicación en la aritmética y se utilizan los mismos símbolos.

3.1. Conmutatividad

En la multiplicación, **el orden de los factores no altera el producto**. Esto quiere decir que el producto ab es equivalente a ba y el producto xyz puede escribirse como yxz o zyx.

3.2. Asociatividad

En la multiplicación algebraica, **los factores de un producto pueden agruparse de cualquier manera**. Por ejemplo:

$$abcd = a \cdot (bcd) = (ab) \cdot (cd) = (abc) \cdot d$$

3.3. Signos

Al igual que en la aritmética el signo del producto dependerá del signo de los factores.

Factores de signos iguales dan un producto +
Factores de diferente signo dan un producto −

De este modo

$$(+a) \cdot (+b) = ab$$
$$(-a) \cdot (-b) = ab$$
$$(-a) \cdot (+b) = -ab$$
$$(+a) \cdot (-b) = -ab$$

3.4. Exponentes

Al multiplicar potencias que tienen en común la base, el resultado se obtiene escribiendo la misma base y el exponente será **la suma de los exponentes de cada factor**. Por ejemplo:

$$x^2 \cdot x \cdot x^5 = x^{2+1+5} = x^8$$

Esto lo podemos comprobar usando la definición de la notación de potencias.

$$x^2 \cdot x \cdot x^5 = xx \cdot x \cdot xxxxx = xxxxxxxx = x^8$$

De manera general podemos decir que

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

3.5. Coeficientes

El coeficiente del producto de dos factores es igual al producto de los coeficientes de cada uno de los factores. Por ejemplo:

$$5a \cdot 8b = 40ab$$

Esto lo podemos comprobar utilizando la propiedad conmutativa de la multiplicación.

$$5a \cdot 8b = 5 \cdot 8 \cdot a \cdot b = 40ab$$

4. Generalización aritmética

Resolver un problema utilizando álgebra tiene muchas ventajas, una de ellas es que obtienes una solución genérica que dependerá de los valores que uno desee asignar a las variables genéricas. Se denomina **valor numérico** de una expresión algebraica al resultado que se obtiene al sustituir las letras por valores numéricos dados y luego efectuar las operaciones correspondientes.

Por ejemplo, el perímetro de un rectángulo de lados a y b es $2a + 2b$. Si queremos hallar el valor numérico del perímetro cuando los lados miden $a = \frac{1}{2}$ y $b = 6$, debemos reemplazar los valores numéricos indicados.

$$\begin{aligned} 2a + 2b &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot (6) \\ &= 1 + 12 \\ &= 13 \end{aligned}$$

✍ ***Ejercicios*** ***4***

Encontrar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas considerando

$$a = \frac{1}{3},\ b = 1,\ c = 2$$

1. $10ab$
2. abc
3. a^2bc^2
4. $\dfrac{a}{bc}$
5. $\dfrac{2}{3}b^2c^3$
6. $\sqrt{abc^2}$
7. $a^{-1}b^2c^{-2}$
8. $\dfrac{\frac{1}{6}b}{a}$

4.1. Problemas con notación algebraica

Como el álgebra es una generalización de la aritmética, con las letras podemos hacer las mismas operaciones que con los números aritméticos y resolver problemas de manera genérica. Esto presenta una dificultad adicional a los estudiantes y por lo mismo hemos dispuesto una serie de ejemplos y ejercicios para estudiar y ejercitar esta forma de abordar los problemas.

✎ *Ejemplo*

1. *Pedro tenía $\$a$, le regalaron $\$x$ y gastó $\$m$ en comida. ¿Cuánto dinero tiene Pedro?*

   Solución: El regalar es sinónimo de aumentar o sumar, mientras que gastar es sinónimo de disminuir o restar. Entonces el dinero que tiene Pedro es: lo que tenía más lo que le regalaron, menos lo gastado.

   $$\$a + \$x - \$m = \$(a + x - m)$$

2. *Si vendo $(x + y)$ trajes de noche a $\$18$ cada uno, ¿cuál es el valor total de la venta?*

   Solución: Como cada traje vale $\$18$ y en total vendo $(x + y)$, entonces el valor de la venta total es la multiplicación de ambos valores:

   $$\$18(x + y)$$

3. *Si x litros de bencina cuestan $\$y$, ¿cuál es el valor de 1 litro de bencina?*

   Solución: Conocemos el valor de x litros de bencina, entonces si dividimos el valor total $\$y$ por el número de litros obtendremos el valor de 1 litro.

   $$\text{El valor de 1 litro de bencina es } \$\frac{y}{x}$$

4. *La superficie de un campo rectangular es $s[\text{m}^2]$ y el largo mide $10[\text{m}]$, entonces ¿cuántos metros mide el ancho del campo?*

   Solución: La superficie s es igual al largo por el ancho, llamemos a a este último. Entonces

   $$s[\text{m}^2] = 10[\text{m}] \cdot a$$

   Luego

   $$a = \frac{s[\text{m}^2]}{10[\text{m}]} = \frac{s}{10}[\text{m}]$$

Desafío 1



Se sabe que en el primer piso de un hotel hay x habitaciones. En el segundo piso hay el doble de habitaciones que en el primero, y en el tercer piso hay la mitad de las habitaciones que hay en el primer piso. Según esto, ¿cuántas habitaciones tiene el hotel? Respuesta

Desafíos resueltos

✓ Desafío I: En el piso 1 hay x habitaciones, en el piso 2 hay $2x$ y en el tercero hay $\frac{x}{2}$ habitaciones. Para saber el total sólo basta sumarlas: $x + 2x + \frac{x}{2} = 3x + \frac{x}{2} = \frac{6x + x}{2} = \frac{7x}{2}$ Volver

Bibliografía

[1] Álgebra, *Edición 1983*, CODICE S.A. Madrid (1983)
Dr. Aurelio Baldor.

[2] Apuntes para la preparación de la PSU Matemática, *Segunda Edición, 2009*,
Pamela Paredes Núñez, Manuel Ramírez.