open green road

Guía Matemática

FUNCIÓN LINEAL

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Función lineal

Es una función de la forma

$$f(x) = mx \qquad \text{con } m \text{ constante real no nula}$$

Dicha función determina una proporción directa entre la abscisa y la ordenada.

1.1. Gráfica

¡Mira!

Lo que diferencia a una función lineal de otra es el coeficiente m que determina la proporción directa entre x e y. Para entender el efecto de m tomemos algunos ejemplos y analicemos las gráficas.

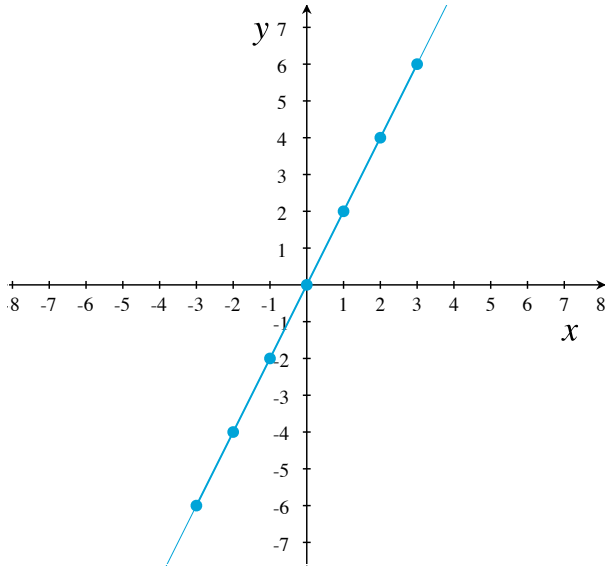
1.1.1. Si $m > 0$

Por ejemplo, si $m = 2$, la función lineal es $f(x) = 2x$. Al dar algunos valores a x se obtiene:

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2 \cdot -3 = -6 \\ f(-2) &= 2 \cdot -2 = -4 \\ f(-1) &= 2 \cdot -1 = -2 \\ f(0) &= 2 \cdot 0 = 0 \\ f(1) &= 2 \cdot 1 = 2 \\ f(2) &= 2 \cdot 2 = 4 \\ f(3) &= 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

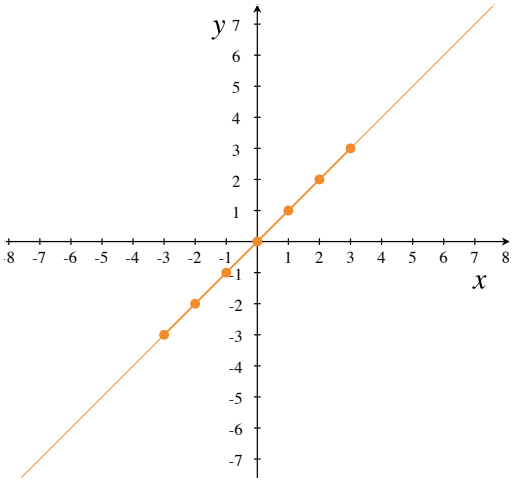
Si ordenamos los valores obtenidos en una tabla y los graficamos como pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano y luego los unimos, podemos notar que se forma una recta[1] la cual se compone de todos los puntos tales que $y = 2x$. Cualquier par ordenado de dicha recta es de la forma $(x, f(x)) = (x, 2x)$.

x	y
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6

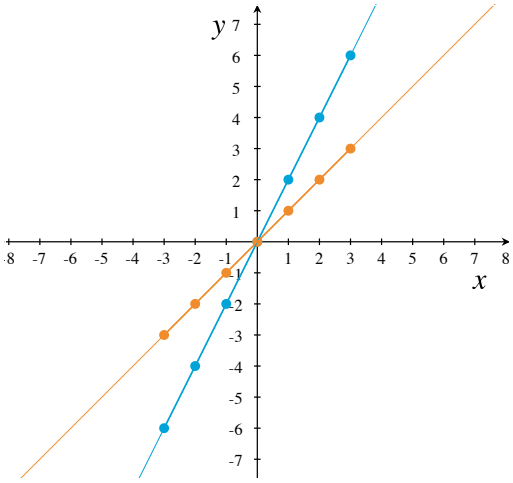


[1] La afirmación viene del hecho de que por 2 puntos distintos pasa una única recta

Si ahora consideramos $m = 1$, la función es $f(x) = y$ y su gráfica:



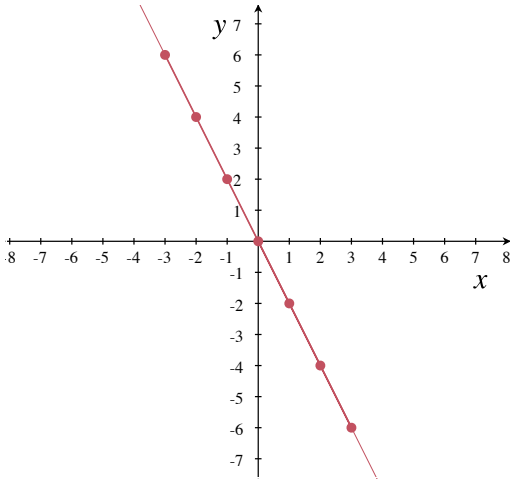
Al comparar ambas funciones con $m > 0$ mediante un gráfico podemos notar que la diferencia entre ellas es su inclinación o **pendiente**. De hecho a la constante m se le denomina pendiente de la recta.



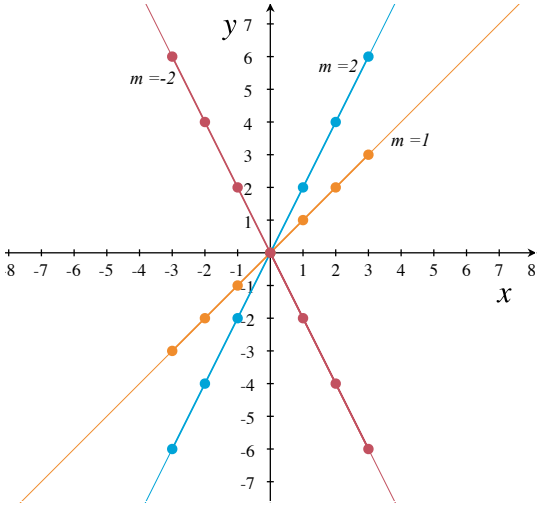
1.1.2. Si $m < 0$

Para estudiar este caso tomemos $m = -2$, es decir, $f(x) = -2x$. Al repetir el proceso realizado antes obtenemos:

x	y
-3	6
-2	4
-1	2
0	0
1	-2
2	-4
3	-6



Con esto ya podemos concluir que m en la recta descrita por la función afín $f(x) = mx$ corresponde a la inclinación de la misma. Si nos imaginamos que caminamos de derecha a izquierda sobre una recta con $m < 0$ iremos "subiendo" de tal forma que mientras más grande sea m la pendiente será más empinada; si $m < 0$ iremos en una pendiente que "baja".



Por último cabe destacar que la gráfica de la función lineal es una **recta que pasa siempre por el origen** del eje cartesiano.

2. Función afín

Es una función de la forma

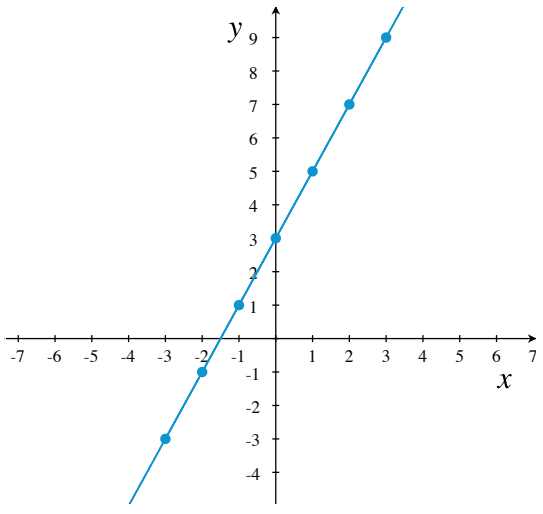
$$f(x) = mx + n \qquad \text{con } m,\ n \text{ constantes reales no nulas}$$

Las características de la función afín están completamente determinadas por los coeficientes m y n. Para entender qué significan m y n en la función haremos el proceso de graficarla en el plano cartesiano para diferentes valores.

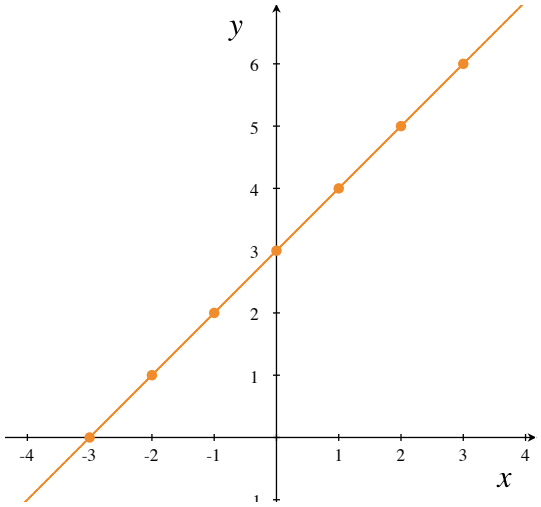
2.1. Gráfica

Consideremos m y n mayores que cero, por ejemplo $m = 2$ y $n = 3$, para tal caso la función afín es $f(x) = 2x + 3$. Generamos una tabla de valores x e y para luego graficarlos.

x	y
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9



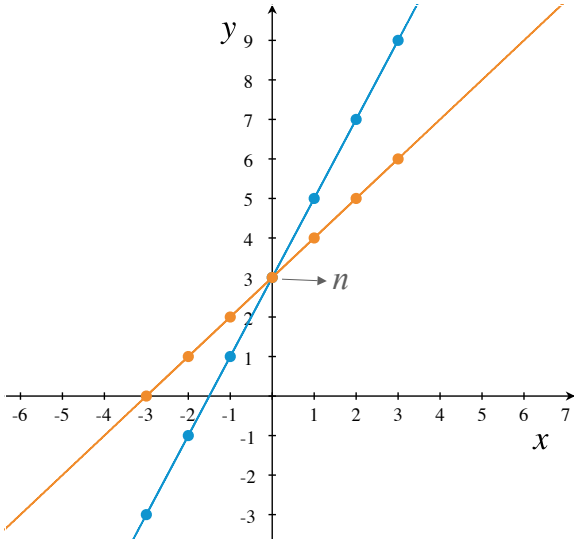
Tomemos ahora una función donde $n = 3$ al igual que en el caso anterior, por ejemplo $g(x) = x + 3$, donde $m = 1$. Si repetimos el proceso anterior obtenemos la siguiente gráfica:



Si mantuvimos fijo $n = 3$ para las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x + 3$ ¿qué tienen en común las dos gráficas? La respuesta a esta pregunta es **el intercepto con el eje** y. De hecho la condición para que una **función cualquiera** intersecte al eje y es que $x = 0$. Si evaluamos $x = 0$ en una función afín cualquiera se tiene:

$$f(x) = mx + n$$
$$f(0) = m \cdot 0 + n$$
$$f(0) = n$$

Entonces cuando $x = 0$, $y = n$ independientemente del valor de m.



En una función afín de la forma

$$f(x) = mx + n$$

la constante n representa en el gráfico el punto de intersección $(0, n)$ con el eje y

2.2. Interpretación de los coeficientes

La constante m en la función afín $f(x) = mx + n$ representa en la gráfica la inclinación o **pendiente** de la recta al igual que en la función lineal vista anteriormente. Podríamos decir que la gráfica de una función afín es una recta que **no pasa por el origen**, la cual intersecta al eje de las ordenadas y en el punto $(0, n)$ y su **pendiente** es m.

Desafío I



¿En qué punto la función $f(x) = mx + n$ intersecta al eje x? Respuesta

3. Ecuación de la recta

Consideremos una ecuación de primer grado cualquiera con dos incógnitas como la siguiente

$$y = mx + n$$

donde m y n son constantes reales. Desde el álgebra podemos entender a una **recta como la representación en el plano cartesiano de los pares ordenados** (x, y) **que satisfacen dicha igualdad**. La similitud con una función afín no es casualidad, ya que tienen la misma representación en el plano cartesiano, pero es diferente el enfoque de estudio matemático cuando la consideramos como función o como ecuación. En nuestro caso nos iteresará estudiar las características típicas de una recta como pendiente, paralelismo, perpendicularidad, colinealidad de puntos, e intersecciones desde el punto de vista algebraico.

Hay dos representaciones típicas de la ecuación de la recta que debemos conocer para la PSU:

- Forma General: $ax + by + c = 0$
- Forma Principal: $y = mx + n$

Para los casos que siguen consideraremos dos rectas L_1 y L_2 definidas como:

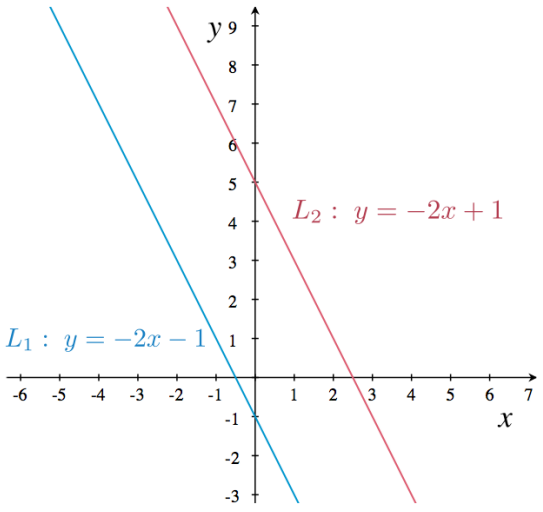
$$L_1 : \ y = m_1 x + n_1$$
$$L_2 : \ y = m_2 x + n_2$$

3.1. Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma inclinación o pendiente y cortan al eje y en puntos diferentes. En lenguaje algebraico, para las rectas L_1 y L_2 la condición es que:

$$m_1 = m_2 \qquad n_1 \neq n_2$$

Por ejemplo las recta $L_1 : y = -2x - 3$ y $L_2 : y = -2x + 5$ son paralelas porque tienen la misma pendiente $m = -2$ y los interceptos son diferentes: $n_1 = -3$ y $n_2 = 5$.



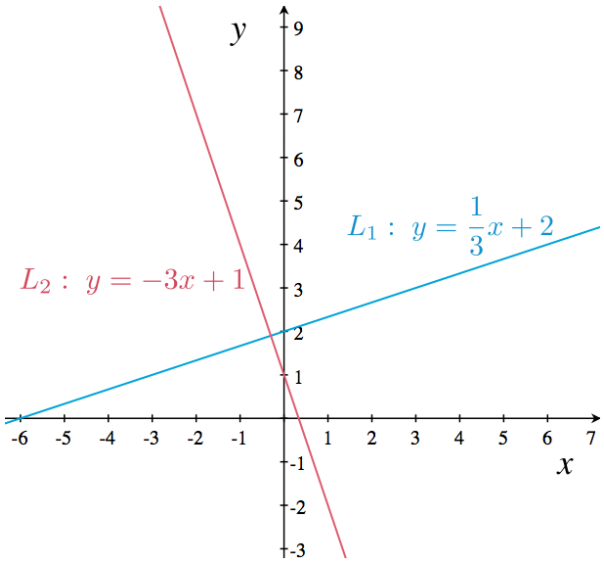
3.2. Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando el ángulo que forman en su intersección es recto. Este evento ocurre cuando la multiplicación de las pendientes es -1. En lenguaje algebraico, L_1 y L_2 son perpendiculares sí y sólo si:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Por ejemplo, las rectas $L_1 : \ y = \frac{1}{3}x + 2$ y $L_2 : = -3x + 1$ son perpendiculares porque al multiplicar las pendientes obtenemos -1:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= \frac{1}{3} \cdot -3 \\ &= -1 \end{aligned}$$



3.3. Rectas colineales

Dos rectas son colineales si tienen todos los puntos en común, pero como por dos puntos sólo puede pasar una única recta, para saber que dos rectas son colineales basta saber si tienen dos puntos en común. Las rectas L_1 y L_2 son colineales si sus pendientes e interceptos son iguales:

$$m_1 = m_2 \qquad n_1 = n_2$$

3.4. Rectas secantes

Dos rectas se llaman secantes cuando se intersectan sin ser perpendiculares. Esto implica que para L_1 y L_2 debe ocurrir que:

$$m_1 \neq m_2 \qquad m_1 \cdot m_2 \neq -1$$

4. ¿Cómo hallar la ecuación de una recta?

Para hallar la ecuación de una recta necesitamos saber el valor de los coeficientes m y n que determinan la ecuación. Como deseamos encontrar 2 valores (m y n), necesitamos por lo menos dos informaciones diferentes para resolver el problema.

4.1. Pendiente

Antes de seguir con el problema planteado anteriormente, recordemos que por dos puntos distintos para una única recta. En base a esto consideremos dos puntos diferentes (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Por esos puntos, como dijimos antes, pasará una única recta de la forma $y = mx+n$, y como los puntos pertenecen a la recta deben satisfacer la igualdad, es decir:

$$y_1 = mx_1 + n$$
$$y_2 = mx_2 + n$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (m y n). Si restamos los miembros de la derecha de cada ecuación y los miembros de la izquierda de cada ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= mx_2 + n - (mx_1 + n) \\ y_2 - y_1 &= mx_2 + n - mx_1 - n \\ y_2 - y_1 &= mx_2 - mx_1 \\ y_2 - y_1 &= m(x_2 - x_1) \\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= m \end{aligned}$$

Hemos encontrado una expresión para la pendiente m que depende de dos puntos cualquiera por los que pasa la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La pendiente la podemos entender como la razón de cambio de la variable dependiente y respecto de la variable independiente x y nos indica qué tan rápido crece o decrece y. La letra griega Δ representa la variación de las variables en un mismo tramo.

Desafío II



Mostrar que la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ Respuesta

Como los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son conocidos, la pendiente también lo es. Ahora el problema se reduce a una ecuación con una incógnita (n) que para hallarla sólo hace falta despejarla de alguna de las ecuaciones del sistema.

✎ ***Ejemplo***

1. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(3, 1)$ *y* $(2, -6)$

   Solución: La ecuación de la recta será del tipo $y = mx + n$. Primero calculamos la pendiente m según la expresión anterior:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{-6 - 1}{2 - 3} \\ &= \frac{-7}{-1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Para obtener n reemplazamos los valores de x e y de cualquiera de los dos puntos en la ecuación principal. Al usar el punto $(3, 1)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ y &= 7x + n \\ 1 &= 7 \cdot 3 + n \\ 1 &= 21 + n \\ n &= -20 \end{aligned}$$

Como $m = 7$ y $n = -20$ la ecuación principal de la recta es:

$$y = 7x - 20$$

Para comprobar el resultado basta con ver si los puntos satisfacen la igualdad. Para $(3, 1)$

$$\begin{aligned} y &= 7x - 20 \\ 1 &= 7 \cdot 3 - 20 \\ 1 &= 21 - 20 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Para $(2, -6)$

$$\begin{aligned} y &= 7x - 20 \\ -6 &= 7 \cdot 2 - 20 \\ -6 &= 14 - 20 \\ -6 &= -6 \end{aligned}$$

Con esto hemos comprobado que la ecuación principal encontrada es correcta.

2. *Hallar la ecuación de la recta con pendiente* $m = \frac{1}{2}$ *y que pasa por el punto* $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Solución: La ecuación de la recta es del tipo $y = mx + n$, donde $m = \frac{1}{2}$ y n lo desconocemos.

$$y = \frac{1}{2}x + n$$

Como el punto $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ pertenece a la recta, al reemplazarlo en la ecuación debe satisfacer la igualdad:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + n \\ \frac{3}{2} &= \frac{1}{2} \cdot -1 + n \\ \frac{3}{2} &= -\frac{1}{2} + n \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} &= n \\ n &= \frac{4}{2} \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Teniendo m y n podemos decir que la ecuación de la recta de pendiente $m = \frac{1}{2}$ y que pasa por le punto $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ es

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

3. *¿Cuál es la ecuación principal de una recta que corta al eje y en -3 y tiene pendiente $\frac{2}{7}$?*

   Solución: La respuesta a esta pregunta es muy fácil porque nos dan la pendiente $m = \frac{2}{7}$ y además nos dicen que tal recta corta al eje y en -3, con eso nos están dando el intercepto que significa exactamente eso, el lugar donde la recta corta al eje y. La recta buscada es:

$$y = \frac{2}{7}x - 3$$

---

5. Intersección entre rectas

Los problemas de intersección de funciones se reducen a resolver sistemas de ecuaciones. Con ellos podremos encontrar el o los puntos que las curvas tienen en común. En el caso de dos rectas distintas pueden tener a lo más 1 punto en común. Veamos unos ejemplos de intersección.

✎ ***Ejemplo***

1. *Dada las rectas $L_1 : y = 5x - 3$ y $L_2 : y = -x + 21$, hallar el punto de intersección entre ellas.*

   Solución: La intersección entre las rectas corresponde a la solución algebraica del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 5x - 3 \\ y & = & -x + 21 \end{array}$$

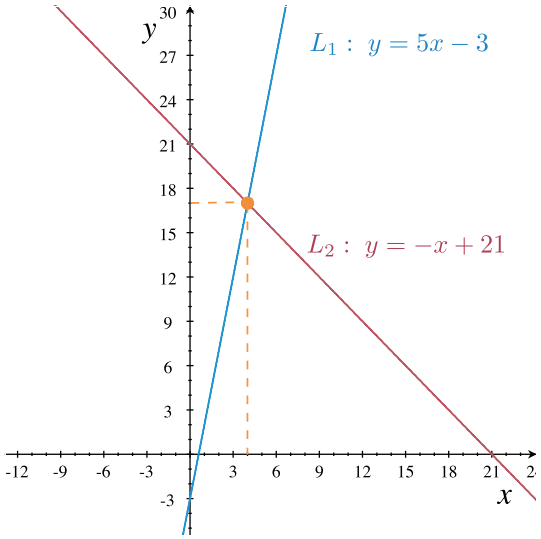
   Para resolverlo podemos usar la igualación, ya que ambas ecuaciones están igualadas a y, los miembros de la derecha serán iguales.

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= -x + 21 \\ 6x &= 24 \\ x &= \frac{24}{6} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

   Sabiendo el valor de $x = 4$, lo reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones de las rectas L_1 o L_2. Si tomamos L_2:

$$\begin{aligned} y &= -x + 21 \\ &= -(4) + 21 \\ &= -4 + 21 \\ &= 17 \end{aligned}$$

   Como $y = 17$, el punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2 es $(4, 17)$



En la gráfica de las funciones se puede apreciar que el punto en común entre ellas es efectivamente $(4, 17)$

En el caso que las rectas sean paralelas el punto de intersección no existirá, esto ocurrirá cuando las rectas tengan la misma pentiende y diferente intercepto.

✍ *Ejercicios* 1

1. *Hallar la ecuación de la recta que cumpla con las siguientes características*

   a) Pasa por el puntos $(0, 1)$ y tiene pendiente $\frac{1}{5}$.

   b) Pasa por el origen del plano cartesiano y tiene pendiente -1.

   c) Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(5, -5)$.

   d) La pendiente es $\frac{1}{3}$ y el punto $\left(\frac{1}{12}, 3\right)$ pertenece a la recta.

   e) Es perpendicular a la recta $L_1 : y = \frac{2}{3}x - 3$ en el punto $(0, -3)$.

   f) Es paralela a $y = \frac{x}{9} - 8$ y cruza el eje x en -1.

2. Bosqueja las gráficas de las siguientes ecuaciones:

   a) $y = -x$

   b) $0 = 2y - x + 1$

   c) $0 = 3x - 2y - 1$

   d) $y = x - 1$ y $y = -x + 1$

Desafíos resueltos

✓ Desafío I: La función $f(x) = mx + n$, y cualquier otra, intersecta al eje x cuando $f(x) = 0$. Es decir

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + n \\ 0 &= mx + n \\ -n &= mx \\ x &= -\frac{n}{m} \end{aligned}$$

El punto de intersección con el eje x es $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$ Volver

✓ Desafío II: Recordemos que al invertir una resta se cumple que

$$a - b = -(b - a)$$

En nuestro caso $y_2 - y_1 = -(y_1 - y_2)$ lo mismo que para $x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2)$, de tal modo que

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} \\ &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

Con lo cual se cumple la igualdad pedida. Este resultado nos sirve para afirmar que no importa a qué punto llamamos (x_1, y_1) y a cuál punto (x_2, y_2) para hallar la pendiente de una recta. Volver

Bibliografía

[1] Apuntes de Álgebra I, Tomo I, *Segunda edición 1993*, Facultad de Ciencias, USACH *Antonio Orellana Lobos.*

[2] Apuntes Álgebra, *Edición 2003*, Facultad de Ciencias, USACH *Ricardo Santander Baeza.*